Nombre de la actividad: ¿El fin del mundo? La leyenda de las torres de Hanoi
Nivel o edad sugeridos: 5o primaria 10+
Tiempo estimado: 60 a 120 minutos

Organización: Individual
Palabras Clave: crecimiento exponencial, recursividad, patrones, rompecabezas, torres de Hanoi

Resumen de la actividad:
Al inicio del taller se plantea un problema, cuya solución depende de que los participantes entiendan cómo funciona el rompecabezas de las torres de Hanoi. A partir de esto, se intenta resolver el problema usando diferentes estrategias. Una vez que se haya encontrado al menos una solución, se procede a buscar la solución óptima. Para finalizar, se busca generalizar la solución y responder al problema inicial.

Objetivo:
Se espera que los participantes entiendan los conceptos de crecimiento exponencial y recursividad; que experimenten de manera lúdica un problema; apliquen técnicas de resolución de problemas: prueba y error, casos fáciles y después generalicen; deducción de patrones; graficar y entender una relación de números; deducir una fórmula abstracta; obtener la solución óptima.

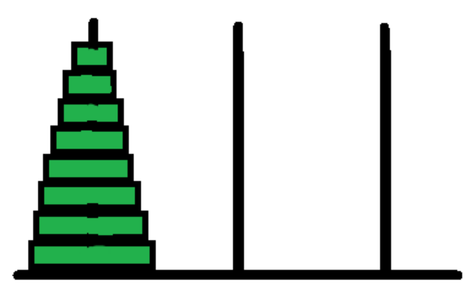
Materiales: Para cada estudiante

- 1 rompecabezas de Torres de Hanoi con al menos 8 discos. (se pueden hacer o comprar)
- 1 copia de la tabla 1 de la página *34*
- 1 hoja para graficar
- 1 lápiz

Descripción:

Inicio

El rompecabezas consiste en tres postes y 8 discos, todos de diferentes diámetros, como se muestra en la siguiente figura:



.

Fue inventado por el matemático francés Edouard Lucas en 1883. Se inspiró en una leyenda hindú que relataremos a continuación.

La leyenda: El fin del mundo (¡Sí! ¡Otro!)

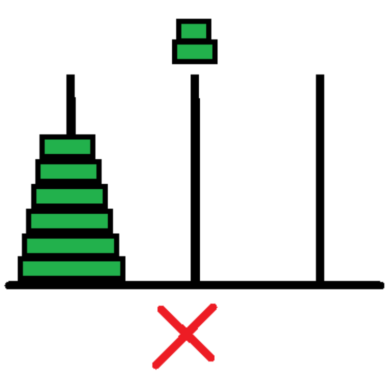
La leyenda cuenta que en el principio de los tiempos se entregaron 64 discos de oro a los monjes de un templo y tres postes, ubicado en la ciudad de Benarés, India. Todos los discos tenían diferentes diámetros y fueron ordenados, en uno de los postes, de mayor a menor, con el disco de mayor diámetro en la base. La tarea asignada a los monjes fue la siguiente: transferir los 64 discos de uno de los tres postes a otro, con la restricción que un disco nunca puede ser colocado arriba de otro cuyo diámetro sea menor y solo se puede mover un disco a la vez. Con esas reglas, durante el proceso pueden poner los discos en cualquiera de los tres postes.

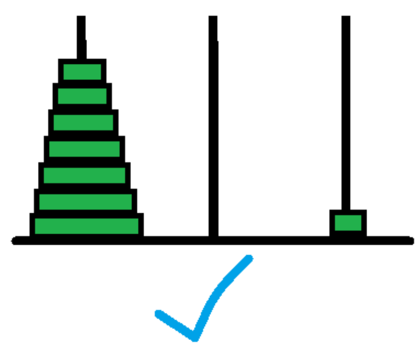
Los monjes tienen que trabajar día y noche, y en cuanto terminen el trabajo, el templo se convertirá en polvo y el mundo se desvanecerá del universo. Ahora, la gran pregunta es: ¿en cuánto tiempo acabarán el trabajo los monjes?

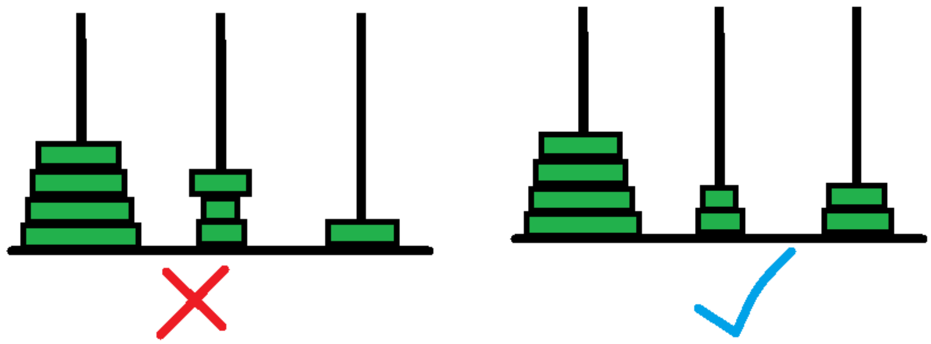
Hay dos maneras de atacar el problema, empezar con pocos discos e ir aumentando la dificultad o jugar con ocho discos desde el principio y una vez familiarizado con el rompecabezas, hacer casos más fáciles.

Al inicio se busca que el participante entienda el problema, las reglas del rompecabezas y la solución a la cual se quiere llegar. Se hace notar que hay distintas maneras de resolverlo.

- ✧ El objetivo del rompecabezas es mover todos los discos de uno de los poste a otro.
- ✧ Solo se puede mover un disco a la vez.
- ✧ No se puede poner un disco grande sobre uno pequeño.







Se reparten los rompecabezas y una vez que todos entienden cuáles movimientos son válidos y cuáles no, se deja que experimenten un rato y se familiaricen con él.

Se pide a los participantes que, de ser posible, cuenten cuantos movimientos les toma resolver el problema.

Se recomienda que primero aborden el problema de ocho discos, pero se puede empezar con menos discos.

En caso de que les cueste resolver el problema, se puede sugerir que quiten uno o varios discos de la torre e intenten resolverlo nuevamente.

Es importante recomendarles que pongan mucha atención en los movimientos que realizan y vean si siguen algún tipo de patrón que ayude a resolver el problema.

Después de un intervalo de tiempo adecuado, se pide que expongan las estrategias con las que estén trabajando. Finalmente, se acuerda cuáles creen que funcionan mejor y por qué.

Desarrollo

Una vez que los participantes entienden completamente el objetivo y reglas del juego, el siguiente paso es intentar encontrar la solución óptima al problema; es decir, encontrar el mínimo número de movimientos con los que es posible llegar a la solución deseada.

El plan de esta parte del taller, es encontrar la solución óptima para los casos donde el número de discos es 1, 2, 3,..., 8. Ahora, se pregunta cuántos movimientos son necesarios para mover de un poste a otro la torre de un solo disco y se anotan en una tabla como la 1.

La respuesta se anota, ya sea en el pizarrón o en una proyección.

En seguida se pregunta: ¿cuántos movimientos son necesarios para mover la torre de dos discos? Si las respuestas son variadas, de nuevo se pide que alguien pase al frente a resolverlo.

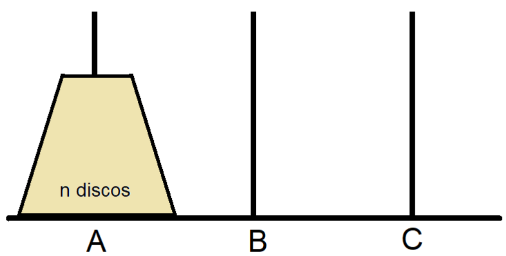
Una vez que el grupo entiende que ahora se quiere encontrar la menor cantidad de movimientos necesarios para mover la torre con diferentes cantidades de discos, se reparte una copia de la tabla 1 y se pide que intenten llenar el lado derecho de dicha tabla o que lo apunten en un cuaderno. Se puede recordar que pueden usar las estrategias discutidas en el inicio de la actividad.

Se permite al grupo comparar sus resultados y discutir estrategias entre sí. Inclusive pueden formar equipos si así lo creen conveniente.

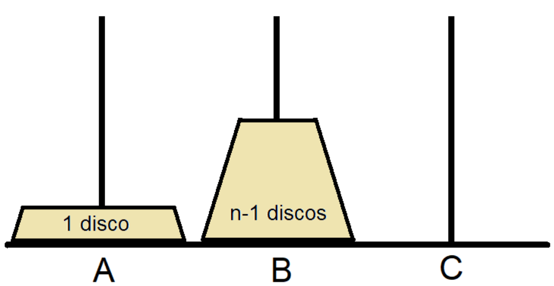
Una vez que la mayoría del grupo ha terminado de llenar su tabla, se llena en el pizarrón o en la proyección. Este rompecabezas se puede resolver de varias formas. En particular, están las soluciones recursiva e iterativa.

1. Solución recursiva. Una solución recursiva es aquella que usa en cada paso el resultado del caso anterior.

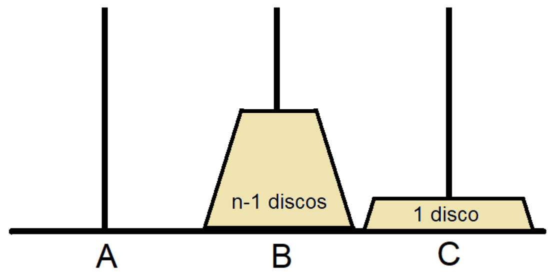
   a. Se tienen los tres postes A, B y C de izquierda a derecha como se muestra en la siguiente figura. Si es el número de discos, construimos la torre de   discos en el poste A.



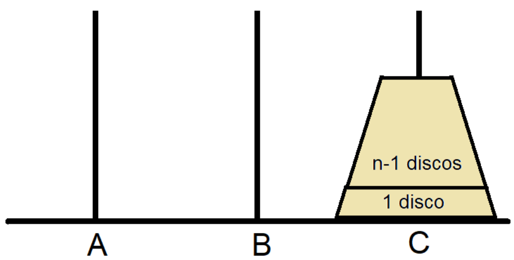
   b. Se empieza por mover los primeros discos del poste A al poste B, dejando el poste C libre. Se supone que son necesarios *x* movimientos para mover los discos del poste A al poste B.

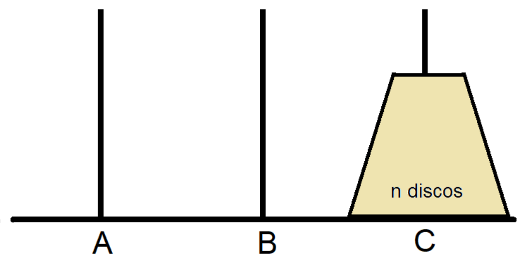


   c. A continuación se mueve el disco que queda en el poste A al poste C. Entonces se llevan   movimientos.



d. Ahora, repitiendo el proceso del paso b, se mueven los discos del poste B al poste C, que se había supuesto requiere movimientos. Entonces se necesitan movimientos para mover una torre de *n* discos.





Ahora, usando el algoritmo anterior, se puede calcular el número mínimo de pasos para 8 discos:

- Para mover la torre de 1 disco, es claro que se requiere un solo movimiento, pues solo se pasa el único disco del poste A al poste B. Así, el número total de movimientos es 1, es decir, 2-1.
- Para mover la torre de 2 discos, se necesitan movimientos, donde x es el número de movimiento para mover discos. Entonces, el número total de movimientos es , es decir, se requieren movimientos para mover la torre de dos discos.
- Para mover la torre de 3 discos, se necesitan movimientos, donde x es el número de movimientos necesarios para mover discos. Entonces el número total de movimientos es , es decir, movimientos para mover la torre.
- Para mover la torre de 4 discos, se necesitan , donde x es el número de movimientos para mover discos. Entonces el número total de movimientos es

  , es decir, movimientos para mover la torre.

- El número mínimo de movimientos requeridos para mover una torre 5 discos es , es decir, movimientos.
- El número mínimo de movimientos requeridos para mover una torre 6 discos es , es decir, movimientos.

- El número mínimo de movimientos requeridos para mover una torre 7 discos es , es decir, movimientos.
- El número mínimo de movimientos requeridos para mover una torre 8 discos es , es decir, movimientos.

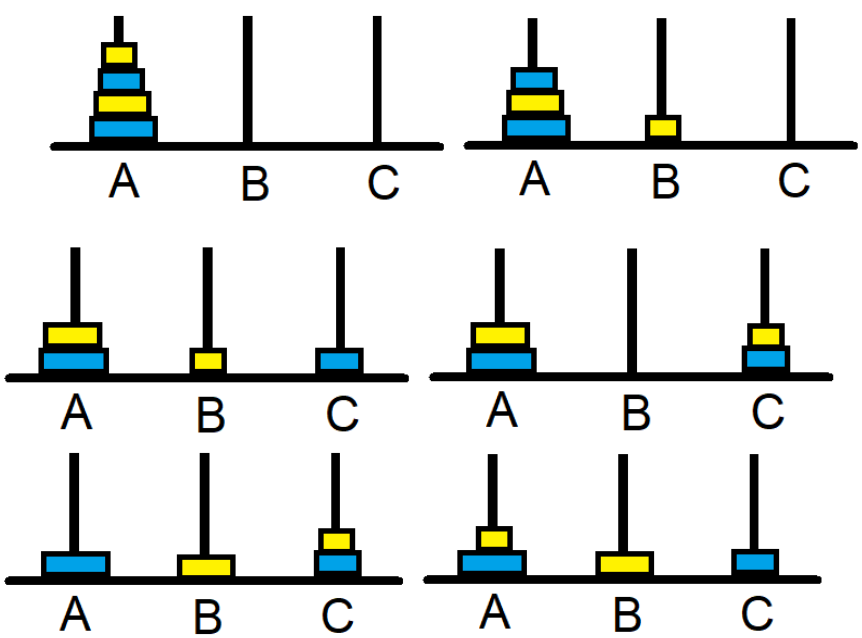
De esta manera se completa la tabla 1 y se obtiene la fórmula para calcular la menor cantidad de movimientos para el problema con discos. La manera de encontrar la fórmula también da un algoritmo para mover los discos.

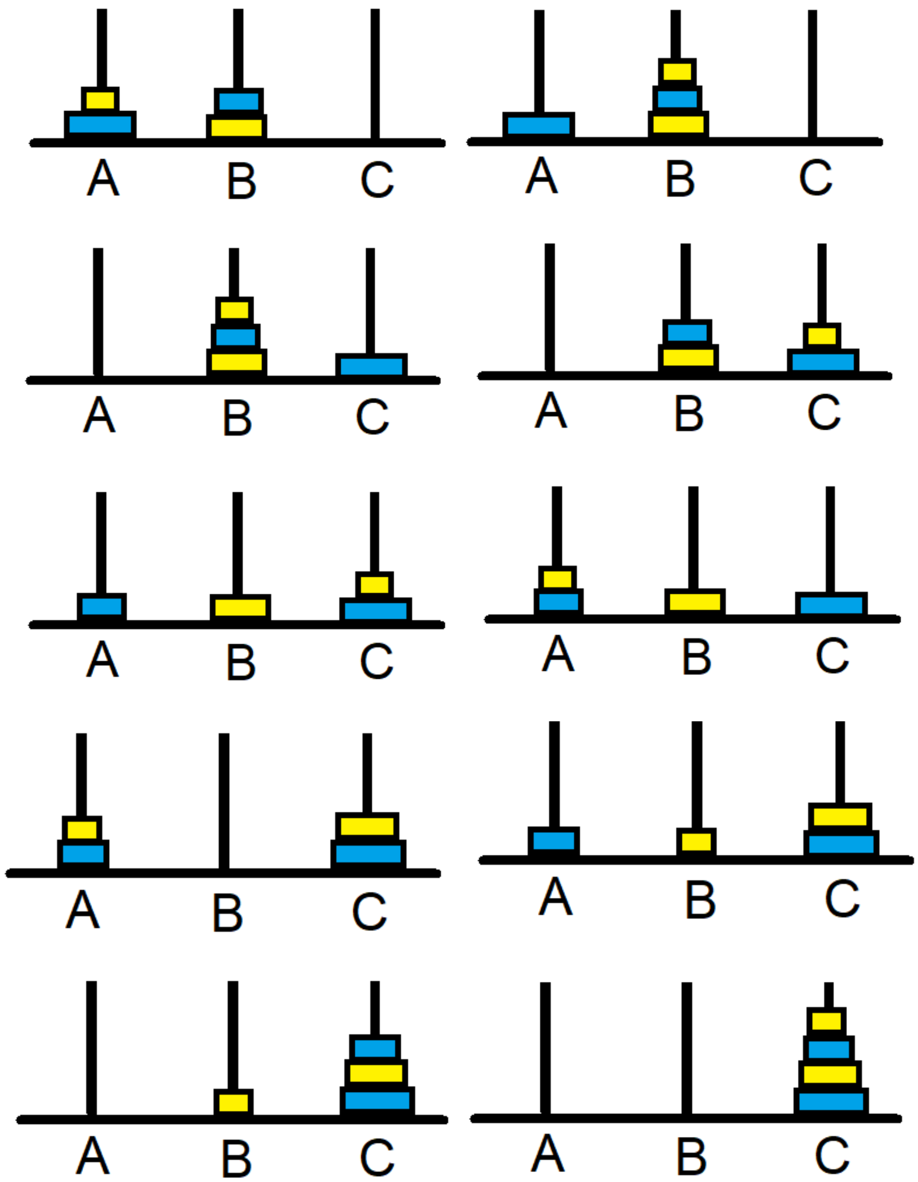
2. Otra manera de mover los discos de una columna a otra:

Primero se numeran los n discos de la torre, empezando con el más pequeño que será el uno y así sucesivamente hasta el disco n, que será el más grande.

Se observa que el disco uno se mueve una vez sí y una vez no, y nunca queda sobre un disco par. Así, un disco par nunca debe de estar sobre otro par y un disco impar nunca debe de estar sobre otro impar.

Para facilitar el proceso se puede pintar a los discos pares de un color y a los impares de otro, entonces siempre deben de estar intercalados los colores de los discos.
Haremos el ejemplo con 4 discos, y pintaremos los discos impares de color amarillo y los pares de color azul, para que sea más claro el algoritmo.





Finalmente, se pregunta si hay alguna relación entre el número de discos y el número de movimientos necesarios para resolver el rompecabezas. Se recuerda que hay más de una manera correcta de caracterizar el patrón.

Cierre

Una vez que se conoce el funcionamiento del rompecabezas y el comportamiento de la solución de los primeros 8 casos, se regresa a la pregunta inicial: ¿cuánto tiempo tardarán los monjes en mover la torre de 64 discos de un poste a otro?

Para empezar se pide al grupo que digan cuál es su predicción sobre cuánto tiempo van a tardar los monjes en completar la tarea que se les impuso, suponiendo que cada movimiento toma un segundo, que los monjes trabajan día y noche y nunca se equivocan. Se anotan en el pizarrón de 5 a 10 predicciones.

Si nadie se atreve a dar una aproximación, se puede preguntar si piensan que serán más de 1000 segundos, 10 000 segundos, 100 000 segundos o cantidades del estilo.

En matemáticas muchas veces, cuando no es posible llegar a una solución exacta, se pueden hacer aproximaciones para tener una idea sobre cómo sería la solución sin resolver el problema con mucho rigor. Una manera de ver cómo se comporta una relación de números es esbozar una gráfica que ayude a predecir cómo se comportará para números más grandes.

Se reparte la hoja para graficar y se pide que saquen la tabla 1 de la parte anterior. A continuación se gráfica la relación de números, donde el eje horizontal será el número de discos y el eje vertical el número mínimo de movimientos. El resultado es un claro ejemplo de crecimiento exponencial; es decir, los valores del eje vertical crecen muy rápido con respecto a los valores del eje horizontal.

Después de graficar, se pregunta si quieren cambiar su predicción sobre cuánto tiempo tardarán los monjes en cumplir su tarea.

Es importante que intenten resolver el problema usando la tabla 1 y la gráfica que acaban de hacer. Muchas veces los matemáticos trabajan en equipo, por lo que hay que animarlos a que ellos también lo hagan, compartiendo ideas. Una vez que hayan trabajado algún intervalo de tiempo razonable, se pide que digan cuál es su respuesta y cómo llegaron a ella.

En este momento se puede explicar brevemente lo que son las potencias y cómo es que la solución exacta del problema es.

Aquí se discuten las soluciones y se les dice que la solución para 64 discos es (dieciocho trillones, cuatrocientos cuarenta y seis mil setecientos cuarenta y cuatro billones, setenta y tres mil setecientos nueve millones, quinientos cincuenta y un mil seiscientos quince) movimientos y si cada movimiento tomara un segundo, éste sería el mismo número de segundos que les tomaría a los monjes completar su tarea.

Una vez calculado esto, se convierten los segundos a años, para ello se pide que calculen cuántos segundos tiene un año. Una vez que se calcula esto, segundos son aproximadamente 585 000 000 000 años, que es el tiempo que se tardarán los monjes si trabajan día y noche y nunca se equivocan.

Tomando en cuenta lo que dicen las teorías cosmológicas modernas, la edad del universo es aproximadamente 14 mil millones de años.

La moraleja del cuento es entonces que no tenemos que preocuparnos de que el mundo se acabe cuando los monjes terminen de transferir los discos, pues en todo caso el sol morirá antes de que los monjes estén cerca de hacerlo. De hecho, la astronomía moderna dice que la vida media de las estrellas comparables a nuestro sol es de 4 000 000 millones de años, es decir que los monjes se tardarían aproximadamente 146 veces la esperanza de vida de nuestro sol.

Nota. Si algún participante quedó muy entusiasmado con el problema, un siguiente nivel puede ser el rompecabezas PANEX.

- **Bibliografía**

[1] Berverly Braxton, Philip Gonsalves, Linda Lipner & Jacqueline Barber, (1995): Math around the world: teachers guide. Lawrence Hall of Science, University of California Berkeley.

Créditos:
Documento original: Mariana Carnalla Cortés
Revisión:
Carmen Delia Mares Orozco
Berta Gamboa de Buen
Rocío González Sánchez

Tabla 1

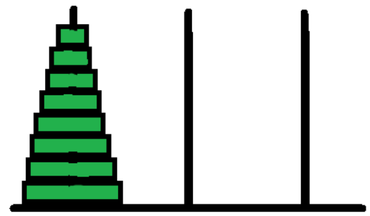
Número de discos	Mínimo número de movimientos
1	

2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Ficha para stand

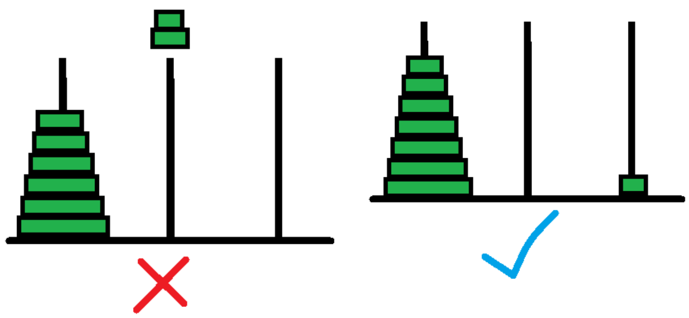
Nombre de la actividad: Torres de Hanoi
Nivel o edad sugeridos: 10+
Descripción: Rompecabezas compuesto de 7 u 8 discos de dos colores, base y tres postes.
Instrucciones:
Armado del rompecabezas

- Se acomoda cada uno de los postes en cada uno de los agujeros de la base.
- En uno de los postes se acomodan los ocho discos de mayor a menor.

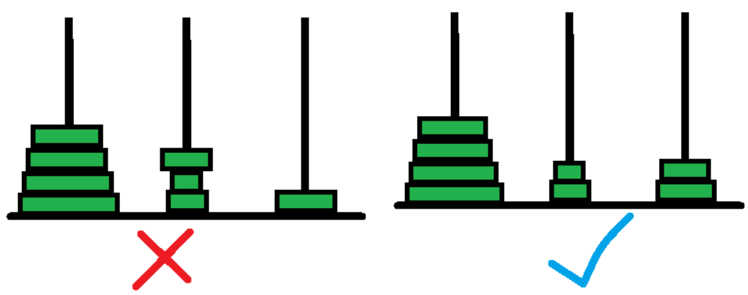


Objetivo: Mover todos los discos del poste donde están a otro con las siguientes reglas:

- Solo se puede mover un disco a la vez.



- No se puede poner un disco grande sobre uno pequeño.



Sugerencias:

- Se puede empezar con menos discos, por ejemplo cuatro.
- Si los discos son de dos colores, deben estar siempre intercalados.