Ajedrez, Granos de Arroz y Potencias de 2

Según la tradición o la leyenda o las historias que nos cuentan, un antiguo rey de la India estaba desconsolado por la pérdida de uno de sus hijos en batalla. Un sabio de la región le presenta como regalo el juego del ajedrez y le enseña a jugarlo. Con el tiempo, el nuevo juego logra que el rey se distraiga de su pesar y queda muy agradecido con el sabio. Le dice: "Pide lo que quieras a cambio de tu obsequio y te será concedido". El sabio dice que la felicidad de su rey es regalo suficiente pero el rey insiste. El sabio le dice:

> Pon un grano de arroz en el primer cuadro del tablero. Dos en el segundo. Cuatro en el tercero y así sucesivamente, duplicando los granos en cada casilla. A cambio del juego quiero esa cantidad de arroz.

El rey está sorprendido pero muy tranquilo. Manda pedir a uno de sus ayudantes que le traiga un costal de arroz para cumplir su promesa. No tarda mucho antes de que el rey entienda su error.

¿Cuánto arroz le pidió el sabio?

Recordemos que un tablero de ajedrez tiene 8 × 8 = 64 casillas. El número que buscamos es

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} + 2^{23} + 2^{24} + 2^{25} + 2^{26} + 2^{27} + 2^{28} + 2^{29} + 2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33} + 2^{34} + 2^{35} + 2^{36} + 2^{37} + 2^{38} + 2^{39} + 2^{40} + 2^{41} + 2^{42} + 2^{43} + 2^{44} + 2^{45} + 2^{46} + 2^{47} + 2^{48} + 2^{49} + 2^{50} + 2^{51} + 2^{52} + 2^{53} + 2^{54} + 2^{55} + 2^{56} + 2^{57} + 2^{58} + 2^{59} + 2^{60} + 2^{61} + 2^{62} + 2^{63}$.

Al igual que el rey, ya no nos parece una tarea tan sencilla y la calculadora pronto nos falla. Por suerte tenemos más herramientas y conocimientos de los que probablemente el rey tenía. Para saber la magnitud del número que buscamos, vamos a usar una tabla de Excel:

1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6
64	7
128	8
256	9
512	10

1024	11
2048	12
4096	13
8192	14
16384	15
32768	16
65536	17
131072	18
262144	19
524288	20
1048576	21
2097152	22
4194304	23
8388608	24
16777216	25
33554432	26
67108864	27
134217728	28
268435456	29
536870912	30
1073741824	31
2147483648	32
4294967296	33
8589934592	34
17179869184	35
34359738368	36
68719476736	37
1.37439E+11	38
2.74878E+11	39
5.49756E+11	40
1.09951E+12	41
2.19902E+12	42
4.39805E+12	43
8.79609E+12	44
1.75922E+13	45
3.51844E+13	46
7.03687E+13	47
1.40737E+14	48
2.81475E+14	49
5.6295E+14	50
1.1259E+15	51
2.2518E+15	52
4.5036E+15	53

9.0072E+15	54
1.80144E+16	55
3.60288E+16	56
7.20576E+16	57
1.44115E+17	58
2.8823E+17	59
5.76461E+17	60
1.15292E+18	61
2.30584E+18	62
4.61169E+18	63

¡Estamos fritos! Ni siquiera Excel puede saber qué número es el que buscamos. Después de 2^{37}, los números que nos pone son aproximaciones. No es de extrañarse, pues 2^{37} tiene 11dígitos. Vamos a hacer una pequeña aproximación. Como $2^{10} = 1024 \approx 1000$.

Entonces $2^{63} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{3} \approx 1000^{6} \times 8$.

Y esto es 8 seguido de 18 ceros. Así:

8’000,000’000,000’000,000

Por suerte tenemos herramientas muchísimo más poderosas que Excel. Preguntándole a Wolfram Alpha averiguamos que

$$2^{63} = 9’223,372’036,854’775,808$$

Nuestra aproximación no estuvo tan mal. Sólo fallo por más de un trillón. No queremos asustarlos, pero ese es sólo el número en la última casilla. El total de granos de arroz en todo el tablero sería

$$2^{64} - 1 = 18’446,744’073,709’551,615$$

Es decir, algo así como dieciocho trillones y medio de granos de arroz. ¿Cómo hacemos para apropiarnos de este número? Vamos a hacer más aproximaciones: según lo que pudimos buscar en internet, se necesitan en promedio 16 granos de arroz para juntar 1 gramo. Se necesitan, entonces 16,000 granos de arroz en un kilo. Se necesitan 16’000,000 granos de arroz por tonelada. Hacemos la división:

$\approx$ 1’152,921’504,606.8 Toneladas de arroz.

Es decir, más de un billón de toneladas de arroz. ¿Cuál es el problema? La producción mundial de arroz en 2010 fue de aproximadamente 700 millones de toneladas. No es ni la mitad del arroz que pidió el sabio.

En el proceso dijimos que el total de granos de arroz en el tablero era de $2^{64} - 1$. ¿Cómo nos inventamos este número?

Nuestra afirmación fue:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Si pasamos el 1 del otro lado

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64}$$

Pero 1 + 1 = 2

$$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64}$$

Pero $2 + 2 = 2(1 + 1) = 2(2) = 2^2$

$$2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64}$$

Pero $2^2 + 2^2 = 2^3$

$$2^3 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64}$$

En general, $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ y así llegamos a

$$2^{63} + 2^{63} = 2^{64}$$

Que sabemos que sí es cierto.

Estamos proponiendo la siguiente fórmula:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Ya propusimos el bosquejo de una prueba. ¿Puedes hacer la prueba por inducción? Recuerda que la inducción es una herramienta que vamos a estar usando siempre.

Qué tal si el sabio, en lugar de pedir que la cantidad de granos de arroz se duplicara, hubiera pedido que se triplicara. Claramente el número hubiera sido mucho mayor, no vamos a hacer los cálculos. Lo que buscamos es cómo calcular

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$$

Vamos a llamar a esa suma a.

Vamos a multiplicar a por 3 – 1

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n)(3 - 1)$$

Observa que aunque 3 – 1 = 2, va a ser mucho más útil multiplicar por 3 – 1 que por 2.
Vamos a separar la multiplicación:

$$3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n)$$

Si multiplicamos la serie de potencias de 3 por 3 lo que va a pasar es que elevamos el grado de cada término en 1. Es decir:

$$(3+3^2+3^3+\cdots+3^n+3^{n+1})-1-3-3^2-3^3-\cdots-3^n$$

Y cada término en positivo se elimina con un término en negativo excepto

$$3^{n+1}-1$$

Entonces lo que tenemos es que

$$a(3-1)-a=3^{n+1}-1$$

Recordemos que el número que queríamos calcular es *a*, por lo tanto despejamos para *a*

$$a=1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}$$

Y tenemos ya una fórmula bastante útil.

Si en lugar de 3, sumamos potencias de un número cualquiera *r*, la fórmula quedaría

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Propusimos ya una manera de probar la fórmula de manera general, intenta la prueba por inducción. Ojo: la inducción se hace sobre *n*, no sobre *r*.

Ejercicios

- Usa la fórmula para calcular $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024$
- Usa la fórmula para calcular $1-3+9-27+81-243+729-2187$
- Haz la demostración por inducción para suma de potencias de *r* desde 0 hasta *n*.
- Reto:
  Demuestra que $\underbrace{1111\ldots11}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}$ es el cuadrado de un entero para todo *n* natural.