

GEOMETRÍA Y CURVATURA

RENATO ITURRIAGA / GUANAJUATO

La geometría le ha interesado al hombre desde hace mucho tiempo, tanto para afrontar problemas prácticos de marcación de terrenos hasta para responderse por la forma de la tierra en donde vivimos. Los Griegos dos siglos antes de nuestra era, no sólo sabían que la tierra era redonda, Eratóstenes, calculó su circunferencia con un error menor a uno por ciento.

Apesar de las grandes contribuciones a la geometría de los griegos, notables las de Euclides, Pitágoras y Eratóstenes, quiero escribir sobre los descubrimientos de Karl Frederick Gauss, un alemán que vivió dos mil años después. A principios del siglo XIX, Gauss revolucionó la geometría al pensar no en la geometría de un plano si no en la geometría de diferentes superficies. Es obvia la diferencia entre un plano, la esfera o las superficies de las fotografías: un techo acanalado de lámina y una película de jabón, pero ¿Cómo medir qué tanto se curva una superficie?, ¿Es posible deformar una superficie a un plano sin cambiar las distancias?

Empecemos por la primera pregunta pero en lugar de superficies pensemos, primero en curvas.

Imaginémonos en un coche sobre una carretera, claramente distinguimos cuando ésta es recta o es una curva. De hecho lo podemos saber sin ver. De niño cuando viajábamos en familia jugaba con mis hermanos al aplastón, que consistía en dejarse llevar por la inercia del coche cuando tomaba una curva. Si el carro doblaba a la derecha nos íbamos a la izquierda y viceversa, entre más cerrada era la curva más fuerte era el aplastón (y también la irritación de mis padres).

En el carro hay tres maneras de producir y sentir un cambio de velocidad, es decir una aceleración; Cuando se pisa el acelerador, sentimos que nos vamos hacia atrás, cuando se pisa el freno, nos vamos



FOTOS: ESPECIALES

hacia adelante; Y finalmente el volante que sin cambiar lo que dice el velocímetro sí cambia la velocidad porque cambia su dirección, y se puede jugar al aplastón.

La manera como los matemáticos miden la curvatura de una curva es precisamente esa, se recorre la curva sin que cambie el velocímetro y se mide la aceleración. A cada punto de la carretera o curva se le asocia un número llamado curvatura, así hay tramos rectos y dentro de las curvas hay unas más pronunciadas que otras.

El problema con las superficies es que la curvatura además de que varía con cada lugar también varía con cada dirección. Por ejemplo en el techo de lámina, se curva en una dirección y en otra no. En la esfera se curva igual en todas las direcciones y en la película

de jabón (catenoide) se curva en una dirección hacia afuera y en otra hacia adentro.

Gauss descubre que cualquier par de curvas en la superficie que pasen por el mismo punto con la misma velocidad tienen la misma aceleración en la dirección perpendicular a la superficie. Pueden tener diferentes aceleraciones en la dirección de la superficie, eso depende de cada curva pero por el hecho de estar en la superficie y tener una velocidad dada tienen una determinada aceleración en la

dirección perpendicular.

Si pensamos que se trata de una partícula que se mueve en la superficie, la partícula tiende naturalmente a salirse de la superficie y para que se quede en ella se debe aplicar una fuerza, ésta es proporcional a la curvatura.

Gauss descubre que entre todas las direcciones, las extremas son las más importantes, es decir la dirección donde más se curva y la dirección que menos se curva son especialmente significativas. A estas direcciones le llaman

Aplicación
Cuando la curvatura media es cero quiere decir que una es la negativa de la otra, que en una dirección se curva hacia afuera y en otra hacia adentro como se muestra en la imagen

Sabías que...

Gauss demuestra que sí podemos deformar una superficie a otra preservando las distancias, entonces las curvaturas son iguales. A este teorema Gauss, lo llamó Teorema Egregium, que en latín quiere decir excepcional. Fue la primera explicación hasta donde yo conozco de que todos los planos de la tierra tienen imperfecciones, no se puede representar fielmente sobre una superficie plana lo que originalmente está en una esfera.

Piñatas y Techos de lámina

Otra consecuencia del teorema de Gauss son nuestros problemas al decorar una piñata, en efecto cuando intentamos decorarla, el papel se arruga lo tenemos que hacer con papelitos pequeños para que la arruga sea tan chica que no se note.

Los techos de lámina, aprovechan este teorema, están contruidos con canaletas no sólo para que se vaya el agua, están contruidos

así para darle rigidez al techo. El techo tiene una dirección donde se curva y otra no, así su curvatura Gaussiana es cero, el producto de las dos. Por esto son fácilmente producibles de una lámina plana y tienen la ventaja que ya no se puede curvar en la otra dirección porque cambiaría la curvatura y esto no se puede hacer sin que cambien las distancias entre los átomos de la lámina.

