Problemas de práctica para examen de admisión

Maestría en Ciencias con especialidad en Matemáticas Básicas

CIMAT

1. Sea V es espacio formado por los polinomios con coeficientes reales y que tienen grado menor o igual que 2.

   i) Determina una base para V.

Definamos $T : V \to V$ por $TP = P'$, la derivada de P.

   ii) Nota que T es lineal y encuentra su matriz respecto a la base señalada en i).

2. Sean A y B matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times m$, respectivamente. Prueba que si $n < m$, entonces AB no es invertible.

3. Demuestra o da un contraejemplo del siguiente enunciado:

Si λ y μ son valores propios de las matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ respectivamente, entonces $\lambda\mu$ es valor propio de AB.

4. ¿Existirán polinomios $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $c(y), d(y) \in \mathbb{R}[y]$ tales que $1 + xy + x^2y^2 = a(x)c(y) + b(x)d(y)$? Construye un ejemplo o prueba que no existen.

5. Sean A y B dos matrices cuadradas tales que $A + B = AB$. Demuestra que $AB = BA$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K. Sea T un endomorfismo de V. Demuestra que V se puede descomponer de forma única como $V_0 + V_1$ de tal manera que $T(V_0) \subset V_0$, $T(V_1) \subset V_1$, $T|_{V_0}$ es nilpotente y $T|_{V_1}$ es invertible.

7. Sean A, B, C, D matrices cuadradas tales que AB^T y CD^T son simétricas y $AD^T - BC^T = I$. Demuestra que $A^TD - C^TB = I$.

8. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ de dimensiones m y n respectivamente. Sean $T, S : V \to W$ transformaciones lineales con T sobreyectiva. Demuestra que $T + tS$ es sobreyectiva para todo $t \in \mathbb{C}$ excepto un número finito de valores.

9. Se inscribe un triángulo rectángulo de base b y altura h en una circunferencia de radio r. Si el centro del rectángulo coincide con el de la circunferencia, calcula sus lados en función del radio r para que su área sea máxima. Da el área del rectángulo.

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado.

i) Si f es continua, prueba que $f(\sup A) = \sup f(A)$.

ii) Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para la cual no se cumpla la igualdad en i).

11. Sea $t > 0$.

a) Prueba que existe una única $x > 0$ tal que $t = x \exp(x)$.

b) Llamemos $x^*(t)$ a la solución del inciso anterior. Prueba que

$$\frac{x^*(t)}{\log(t)} \longrightarrow 1 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty$$

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = f(\frac{x}{n})$, $x \in \mathbb{R}$.

i Encuentra $g = \lim_{n\to\infty} f_n$.

ii Muestra que la convergencia en i) puede no ser uniforme. Justifica tu respuesta.

13. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Prueba que la gráfica de f, $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ no es un cerrado del plano.

14. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ un tetrahedo regular de lado a. Calcula vol$T$.

15. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Supón que para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $DF_p \neq 0$. Supón, además, que F satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $DF_p \circ J = J \circ DF_p$, para toda $p \in \mathbb{R}^2$, donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Muestra que F tiene una inversa local de clase C^1-alrededor de cualquier punto $p \in \mathbb{R}^2$- y que dicha inversa también satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

16. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $\{x_n\} \subset K$ una sucesión. Supón que existe $k \in K$ tal que si alguna subsucesión de $\{x_n\}$ converge, entonces converge a k. Prueba que $\{x_n\}$ converge a k.

17. Prueba el principio de Cavalieri: Sean A, $B \subset \mathbb{R}^3$ compactos cuyo volumen está bien definido. Supón que las intersecciones de A y B con cualquier plano paralelo al xy tienen la misma área. Demuestra que vol$A$ =vol$B$.

18. Determina si la ecuación diferencial $3y+\cos x+2y' = 0$ tiene alguna solución que sea acotada.

19. Encuentra dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

donde m y k son constantes. Explica por qué cualquier solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de las soluciones que encontraste.

20. Muestra que el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$$
$$x(0) = 0$$

no tiene soluciones y explica porqué.

21. Considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

donde p y q son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones que se anulan en el mismo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, explica por qué y_1 y y_2 no pueden generar todas las soluciones de la ecuación diferencial.

22. Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0.$$

23. Encuentra una solución no trivial de la ecuación $y' = x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$, distinta de la solución $y(t) = 1$. Explica por qué esto no contradice la unicidad de soluciones del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

24.Supón que la ecuación $x' = ax^b$, $b > 1$, es un modelo poblacional propuesto pata el crecimiento de cierta especie. Muestra que $x(t) \to \infty$ en tiempo finito, y por lo tanto, no es un modelo apropiado.

25. Encuentra la ecuación general de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = cy^4$.