EXAMENES GENERALES DE MAESTRIA - Julio 1998
Analisis

1. Sea $f : S^2 \to \mathbb{R}$ continua, donde S^2 es la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$. Prueba que f no puede ser inyectiva.

2. Considera la función determinante

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Usa el hecho de que det es multilineal para dar una formula de su derivada en un punto $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_j \in \mathbb{R}^n$. Prueba que una matriz A es un punto crítico de det si y solo si el rango de A es $\leq n-2$.

3. Sea $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ el disco unidad, y $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Prueba que si $x, y \in D$ entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \|\mathrm{grad}\| \|x - y\|.$$

4. $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Supongamos que $[a,b] \times [c,d] \subset U$, y definamos

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Prueba que g es diferenciable en $[c,d]$ y que

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx.$$

5. En los siguientes casos para que valores de s las siguientes integrales son finitas

$$\int_{B(1)} \frac{1}{|x|^s}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-s}$$

Donde $B(1)$ es la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$