EXAMENES GENERALES DE MAESTRIA - Julio 1998
Algebra Lineal

1. Sean X, V y W tres espacios vectoriales sobre un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Sean $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ y $S \in \mathrm{Hom}(W, X)$. Demostrar que,

(1) $S \circ T$ es sobre, si y sólo si S es sobre y $\mathrm{Im}\ T + \mathrm{Ker}\ S = W$.
(2) $S \circ T$ es inyectiva, si y sólo si T es inyectiva y $\mathrm{Im}\ T \cap \mathrm{Ker}\ S = \{0\}$.
(3) $S \circ T$ es un isomorfismo, si y sólo si S es sobre, T inyectiva y $W = \mathrm{Im}\ T \oplus \mathrm{Ker}\ S$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Suponer que todo subespacio de V posee un complemento. Sea $T \in \mathrm{Hom}(V, V) - \{0\}$. Demostrar que,

(1) $T^2 = 0$, si y sólo si V tiene una descomposición en suma directa de la forma $V = V_1 \oplus V_2$, con la propiedad de que $T = 0$ en V_2 y $T(V_1) \subset V_2$.
(2) Suponer que $T^3 = 0$, pero que $T^2 \neq 0$. Demostrar que V se puede escribir en la forma $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, donde $T(V_1) \subset V_2$, $T(V_2) \subset V_3$ y $T(V_3) = 0$.
(3) Suponer que $T^n = 0$, pero que $T^{n-1} \neq 0$. Demostrar que V tiene una descomposición en suma directa de la forma $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, tal que $T(V_i) \subset V_{i+1}$ para $i < n$ y $T(V_n) = 0$.

¿Qué se puede decir de la matriz de T respecto a una base formada mediante bases de $V_1, \ldots, V_n$?

3. Sea V un espacio vectorial sobre un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Sea $T \in \mathrm{Hom}(V, V) - \{0\}$. Recordar que un subespacio $W \subset V$ se llama T-invariante si $T(W) \subset W$.

Sea $p \in \mathbb{F}[x]$ cualquier polinomio y sea $W = \mathrm{Ker}\ p(T)$. Demostrar que, W es T-invariante, si y sólo si, en cualquier factorización $p = p_1 p_2$ en la que p_1 y p_2 sean primos relativos, W se puede descomponer en la forma $W = W_1 \oplus W_2$, siendo $W_i = \mathrm{Ker}\ p_i(T)$, $i = 1, 2$.

4. Sea V un espacio vectorial sobre un campo arbitrario $\mathbb{F}$. Recordar que si $K \subset$ es un subconjunto arbitrario de V, el anulador de K — denotado por K° — es el subespacio del espacio vectorial dual $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$, definido por,

$$K^\circ = \{ f \in V^* \mid \forall v \in K \ f(v) = 0 \}.$$

Similarmente, si $R \subset V^*$ es un subconjunto arbitrario del espacio vectorial dual, el anulador de R — denotado por R° — es el subespacio de V definido por,

$$R^\circ = \{ v \in V \mid \forall f \in R \ f(v) = 0 \}.$$

Demostrar que si $V = M \oplus N$, entonces $V^* = M^\circ \oplus N^\circ$.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ y sea $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ su espacio dual. Sea $B : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma bilineal, simétrica y no degenerada y sean $B^\flat : V \to V^*$ y $B^\sharp : V^* \to V$ las aplicaciones lineales definidas mediante,

$$B(B^\sharp(f), v) = f(v) \qquad \text{y} \qquad B(u, v) = B^\flat(u)(v)$$