$$\frac{\frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!}}{\frac{(k!)^2}{(2k)!}} = \frac{(2k)!\,((k+1)!)^2}{(2(k+1))!\,(k!)^2}$$

EXAMENES GENERALES DE MAESTRIA

ANALISIS

$\lim_{k\to\infty} \frac{k!\,3^k}{k^k} = k!\left(\frac{3}{k}\right)^k$

Enero 1999

A resolver cinco de los siguientes seis problemas. Indica claramente qué cinco deseas que califiquemos.

1. Determina la convergencia o divergencia de las siguientes series:

i.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$ conv

ii.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!3^k}{k^k}.$$ div

$\sqrt[k]{\frac{k!\,3^k}{k^k}} = \sqrt[k]{k!}\,\frac{3}{k}$

iii.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}\log k}{k^2+2k+3}.$$ conv

2. Sea $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices reales de $n \times n$; $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ puede ser identificado con $\mathbb{R}^{n^2}$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ denota el conjunto de las matrices invertibles reales de $n \times n$. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un abierto de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$.

   Considera la aplicación $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ que envía a una matriz en su inversa, $f(A) = A^{-1}$. Prueba que f es diferenciable en todo $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y calcula $Df_A(M)$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua

$\det^{-1}\{(-\infty,0)\cup(0,\infty)\} = GL_n(\mathbb{R})$

3. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^∞; definimos $M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid g(v) = 0\}$. Sea $p \in M$ tal que $\nabla g(p) \neq 0$. Demuestra que, si $v \perp \nabla g(p)$, entonces existe una curva C^∞, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ tal que

   - $\alpha(t) \in M$ para toda $t \in (-\epsilon, \epsilon)$,
   - $\alpha(0) = p$.
   - $\alpha'(0) = v$.

   $f(t) = g(\alpha(t)) = 0$

   $g'(\alpha(t))\,\alpha'(t)$

   Sugerencia: utiliza el teorema de la función inversa-implícita.

   $\alpha(t_0) = p$

$\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)-f(x_0)-Df(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$ $\quad 2^x \times 2^x$

7

$D f_A(M)$

4. Prueba que la integral sobre $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x_1| + \cdots + |x_n|)^{-s} \; dx_1 \cdots dx_n$$

es convergente si y solo si $s > n$.

5. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea A una matriz de $n \times n$ y definamos su norma por

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{1}$$

a. Prueba que (1) en verdad define una norma.

b. Si $\|x\| := \max_j\{|x_j|\}$, demuestra que

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

6. Sea $f \in C([0,1])$. f es Hölder continua con exponente $\alpha > 0$, si

$$N_\alpha(f) := \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} \; : x \neq y \right\}$$

es finito.

Demuestra que el conjunto

$$\{f \in C([0,1]) \mid \; \|f\| \leq 1 \text{ y } N_\alpha(f) \leq 1\}$$

es compacto en $C([0,1])$ con la métrica inducida por la norma

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \; : \; x \in [0,1]\}.$$

$\|A\| = 0$ ssi $A = 0$

su

$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(A + hB) - f(A) - Df_A(B)\,h}{h} = 0$$

8