EXAMENES GENERALES DE MAESTRÍA

ALGEBRA LINEAL

Enero 1999

1. Para la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
calcula:
   i. Su forma canónica real.
   ii. Un conjunto máximo linealmente independiente de vectores propios reales.
   iii. La descomposición de $\mathbb{R}^3$ en subespacios invariantes. En particular decidir si dicha descomposición es de la forma $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
   iv. Una matriz invertible que conjugue a la matriz dada en su forma canónica;i.e. C tal que CBC^{-1} es la forma canónica que encontraste en [i.].

2. Resuelve, usando el método de Gauss-Jordan, el sistema
$$\begin{aligned} x - 2y + z + 2w &= 1 \\ x + y - z + w &= 2 \\ x + 7y - 5z - w &= 4 \end{aligned}$$

3. Considera la matriz
$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   i. Escribe la forma cuadrática q asociada a Q.
   ii. Encuentra el rango y la signatura de dicha forma.
   iii. Escribe la forma canónica, **como forma cuadrática**, de q.

4. Sea V un espacio de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal. Supóngase que $\text{rango}(T^2) = \text{rango}(T)$. Prueba que
$$V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T).$$

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Define el espacio dual V^* y prueba que es un espacio vectorial de la misma dimensión que V.