Examen general de Álgebra Lineal

16 de enero de 2002

1. (3 puntos) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 28 \\ 2 & 28 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector $b^t = (1, -2, 3)$.

(a) Usando eliminación Gaussiana resuelve el sistema $Ax = b$.

(b) Encuentra la factorización $A = LU$. Escribe ésta como $A = LDL^t$.

(c) Usando la última factorización escribe la forma cuadrática

$$q(x) = x^t A x$$

como suma de cuadrados.

(d) ¿Cuál es el rango, la signatura y la forma canónica (como forma cuadrática) de q?.

2. (3 puntos) Sea A una matriz real de $m \times n$ con columnas linealmente independientes. Prueba que para todo $b \in \mathbb{R}^m$ hay una única solución al sistema $A^t A x = A^t b$. ¿Cuál es la relación de esta solución con la solución del problema $Ax = b$?.

3. (2.5 puntos) Encuentra la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (1.5 puntos) Sea A una matriz cuadrada no-singular. ¿ Habrá un valor $\epsilon_0 > 0$ tal que
invertible

$$A + \epsilon I$$

es no-singular para $|\epsilon| < \epsilon_0$, donde I es la matriz identidad? ¿Seguirá siendo cierto para perturbaciones del tipo $A + \epsilon B$, donde B es otra matriz cuadrada de la misma dimensión que A? Justifica tu respuesta.