Exámen General de Análisis I
enero-2004

Resolver 6 preguntas en total, escogiéndolas como se indica. Cada pregunta vale $\frac{10}{6}$ puntos.

Escoger 2 de las siguientes 3 preguntas.

$\frac{10}{6}$ ~~1.~~ Demuestre que $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = \mathbb{I}_n\} \subset M_{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ es un conjunto compacto.

$\frac{10}{6}$ ~~2.~~ Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. Demuestre que $\mathbb{R}^2 - A$ es arco-conexo.

mitad → 3. Sea $\mathcal{C} \subset [0,1]$ el Conjunto de Cantor. Demuestre que
   (a) $\mathcal{C} \neq \emptyset$ pero que su interior es vacío.
   (b) $\mathcal{C}$ es un conjunto *perfecto* (es cerrado y cada punto de $\mathcal{C}$ es un punto de acumulación de $\mathcal{C}$).

Escoger 1 de las siguientes 2 preguntas.

4. Definir qué se entiende por *familia equicontinua de funciones* y determinar cuáles de las siguientes familias de funciones lo son:
   (a) $\{f_n(x) = n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1) \mid x \in [0,1];\ n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) Para $n \in \mathbb{N}$: $g_n(x) = \begin{cases} 4n^2 \cdot x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ -4n^2 \cdot x + 4n & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$

5. Sea $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
   (a) Demuestre que si f es uniformemente continua y $\bar{X}$ es la cerradura de X, entonces existe una única función *continua* $F : \bar{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F|_X = f$.
   (b) Dé un ejemplo de que lo anterior puede ser falso si sólo suponemos que f es continua.

6. **(Pregunta obligatoria)** Demuestra que las ecuaciones

$$0 = x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4$$
$$0 = 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8$$

determinan funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ cerca de $(x,y) = (2,-1)$ tales que $u(2,-1) = 2, v(2,-1) = -1$. Calcula la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Escoger 2 de las siguientes 3 preguntas.

7. (a) Sean $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que existe $\xi \in A$ tal que

$$\int_A f = f(\xi) \cdot (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$$

   ~~(b)~~ Sean $f_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Demuestre que la función $H(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ es integrable y que

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} H(x,y)dxdy = (\int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx) \cdot (\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy).$$

$\frac{310}{6}$ $\frac{10}{6}$

8. (a) Sea $R = [0,\infty] \times [0,\infty] \subset \mathbb{R}^2$. Calcular

$$\int_R e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

SUGERENCIA: CAMBIAR A COORDENADAS POLARES.

(b) Considere la función Gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\,,\ \alpha \geq 0$$

y demuestre que

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\pi}.$$

SUGERENCIA: HAGA EL CAMBIO DE VARIABLE $u = \sqrt{x}$ Y ELEVE AL CUADRADO LA INTEGRAL RESULTANTE PARA UTILIZAR LOS EJERCICIOS 7 (b) y 8 (a).

9. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una variedad tridimensional compacta con frontera ∂M y sea n la normal exterior unitaria en ∂M. Sea F un campo vectorial diferenciable en M y sea $div(F) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$. Utilice el Teorema de Stokes para demostrar el Teorema de la Divergencia:

$$\int_M div(F)dV = \int_{\partial M}(F \cdot n)dA.$$

SUGERENCIA: Considere la 2-forma $\omega = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$ en M y DEMUESTRE que $d\omega = div(F)dV$. Para concluir, puede UTILIZAR que, en ∂M, el elemento de área dA y n satisfacen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} n_1 dA &= dx_2 \wedge dx_3, \\ n_2 dA &= dx_3 \wedge dx_1, \text{ y} \\ n_3 dA &= dx_1 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

2

10