EXAMEN GENERAL DE ANÁLISIS

Agosto 2005

En cada pregunta da argumentos claros y rigurosos que apoyen tus demostraciones.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Define lo que es el $\limsup x_n$ y prueba que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge a $\limsup x_n$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y $B \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado. Prueba que $f(B)$ es acotado.

3. Sean $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = x^n$. Decide (y prueba) si $\{f_n\}$ converge uniformemente o no.

4. *a*) Enuncia el teorema de la función implícita para funciones $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
   b) Úsalo para demostrar el siguiente resultado:
   Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y considera lo siguiente,
   - $S = g^{-1}(0)$,
   - $p \in S$ tal que $\nabla g(p) \neq 0$, y
   - $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \perp \nabla g(p)$.

   Prueba que existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ de clase C^1 tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.
   c) Da una interpretación geométrica del resultado anterior.

5. *a*) Enuncia el Teorema de Stokes para superficies en R^3. Asegúrate de definir y explicar que es cada término que aparece en el enunciado.
   b) Muestra que la divergencia del rotacional de un campo vectorial definido en un abierto U de R^3 es cero.
   c) Considera el campo
   $$X = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$$
   definido en $U = R^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Muestra que $\text{div}X = 0$, pero que, sin embargo, X no es el rotacional de ningún campo vectorial en U.
   d) Explica bajo que condiciones es cierto que un campo con diveregencia cero es un rotacional.

6. Determina para que valores de $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n^{-\alpha})$$

converge.