Examen General de Análisis I

CIMAT, 12 de Julio de 2005

1. Es $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^3 + Sen(y) - e^{x+y}z = 1\}$ **un conjunto conexo? compacto? cerrado? abierto? convexo?**

2. Enuncia el Teorema de la Función Implícita para funciones $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ **con** $N > n$ **y demuestralo en el caso de que** f **es una función lineal.**

3. Enuncia el Teorema de la divergencia explicando cada uno de los términos. Usalo para demostrar que el valor de la integral

$$\Omega = \int\int_{\Sigma} \frac{(a-x, b-y, c-z)}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{3/2}} \cdot dS$$

es independiente de la elección de la superficie Σ**, siempre que se mantenga fija su frontera** Γ**. A partir de este resultado, integrando sobre el exterior de la superficie, probar que si** Σ **es una superficie cerrada, entonces** $\Omega = 4\pi$ **ó** 0**, según que el punto** (a,b,c) **esté en el interior del volumen limitado por** Σ **o fuera de este volumen.**

4. a) Sea $f : [0, \infty > \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x}$**. Prueba que** f **es uniformemente continua.**

b) Sea $k > 0$ **y** $f(x) = \frac{x - x^k}{log(x)}$ **para** $x \in < 0, 1 >$ **y** $f(0) = 0$**,** $f(1) = 1 - k$**. Demuestra que** f **es continua. Es** f **uniformemente continua?**

5. Converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{Sen(n)}{n^2}, \frac{2^n + n}{3^n - n}) \quad ?$$

6. Sea f **una función Lipschitz definida en el intervalo abierto** $(0,1)$**. Prueba que** f **se extiende a una función continua en el intervalo cerrado** $[0,1]$**.**

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX