EXAMEN DEPARTAMENTAL DE ALGEBRA LINEAL

Maestría en Matemáticas, CIMAT, 12 de enero de 2005

Responde las siguientes preguntas:

1. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolved $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aplícale el método de eliminación Gausssiana y escríbela como $A = LDU$. Usa esta expresión para resolver

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Determina la linea en $\mathbb{R}^3$ que mas se aproxima a los puntos

$$(0,0,0)\ ,\ (1,0,0)\ ,\ (0,2,0)\ ,\ (0,0,3).$$

[illegible]

3. Sea V el espacio vectorial generado por

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}Sen[x] \quad , \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}Sen[2x] \quad , \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}Sen[3x] \in L^2[0,2\pi]$$

con el producto interior definido por

Proyección de b, en el espacio generado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$

$$< v, w >= \int_0^{\pi} v(x)w(x)dx$$

$Proy_b = \frac{\langle b, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \cdots + \frac{\langle b, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} u_n$

En es caso si $u \in L^2[0,2\pi]$

en donde son ortonormales. Da una fórmula que exprese la proyección de

$P_V = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \langle u, v_3 \rangle v_3$

$$P_V : L^2[0,2\pi] \to V.$$

Cuál es la relación entre $f(x)$ y $P_V(f(x))$ en términos de mínimos cuadrados?

La mejor aproximación lineal de $f(x)$ a V es $P_V f(x)$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$A = [u_1, u_2]$ $\quad \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

$A\bar{x} = b$ $\quad A\bar{x} = A(A^TA)^{-1}A^Tb$

$A^TA\bar{x} = A^Tb$ $\quad P = A(A^TA)^{-1}A^T$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Supón que nos dan u_1, u_2 como base de un espacio vectorial S de dimensión 2 en $\mathbf{R}^3$ con

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Encuentra la matriz proyección P hacia el subespacio S.
- Calcula la proyección de b al subespacio S. es Pb
- Determina el espacio ortogonal a S. Qué dimensión tiene?
- Calcula la proyección Q al espacio ortogonal a S y la proyección de b a este subespacio. $(I-P)$ $\quad Q = (I-P)$
- Cuáles son las dimensiones de la imagen de P y de Q, así como de sus kerneles?

5. Considera la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - 3y$$

- Determina cuál es el cambio lineal de coordenadas para que esta ecuación diferencial se 'desacople' lo mas posible.
- Expresa esta ecuación en estas nuevas coordenadas.
- Da una expresión de las soluciones utilizando la función exponencial e^{At}. $= e$
- Cuál es el comportamiento asintótico de las soluciones al tender el tiempo a $\pm\infty$? Que papel juegan en esta respuesta los valores propios?

6. Utiliza eliminación Gaussiana para encontrar la forma diagonal de la forma bilineal asociada a la matriz simétrica

$$x^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x$$

Aplica los criterios del determinante y de los pivotes para determinar si es positiva definida y determina cuál es su rango y su signatura?

Sea $A \in M_{m \times n}$ $\quad$ Sea V matriz de eigenvectores de A^HA

U " " " " AA^H

$U^HAV = \Sigma$ $\quad$ como $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Los valores singulares de A, son los valores de los elementos de la diagonal de D.