$160 \times 0.7$
$1120$

# EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA LINEAL

11 de julio de 2005

Resuelve los siguientes problemas. Justifica todas tus respuestas.

(1) Calcula la forma canónica de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) Sea $L : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la función lineal definida por la matriz

$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{+3}{4}$

- (a) ¿Cuál es la dimensión del Núcleo $N(L)$ de $L$?.
- (b) ¿Cuál es la dimensión del Rango $R(L)$ de $L$?.
- (c) Encuentra todas las soluciones de $L(X) = (-2, 1, 0, 3)$.

(3) Sea $L : V \to W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestra que

$\frac{+1}{5}$

$$dimV = dimN(L) + dimR(L)$$

donde $N(L)$ denota el núcleo de $L$ y $R(L)$ la imagen de $L$.

$\frac{+1}{6}$

(4) Sea $A$ una matriz de $m \times n$ que tiene rango $r$. Demuestra que $A^T A$ también tiene rango $r$.

(5) Sean $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ una colección de $k$ vectores linealmente independientes en $\mathbf{R}^n$ (con $1 \leq k \leq n$), y $W$ el subespacio vectorial generado por ellos. Si $A$ es la matriz que tiene como columnas los vectores $a_1, \ldots a_k$

$\frac{+2}{8}$

- (a) Demuestra que si $b \in \mathbf{R}^n$, entonces $P_W(b) = A(A^T A)^{-1} A^T b$ es la proyección ortogonal de $b$ en $W$.
- (b) ¿Cuál es el rango de la matriz $A(A^T A)^{-1} A^T$?

$A^t \cdot A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

$r(A^t A) = r(A)$

$= k$