# EXAMEN GENERAL DE ANÁLISIS

Enero 2006

El total de puntos de este examen es 125; con 75 puntos se aprueba.

1. *a*) (6 ptos.) Enuncia (con lujo de detalle) el Teorema de la función implícita.

   *b*) (14 ptos.) Demuéstralo cuando la función es lineal.

2. (20 ptos.) Considera $f : H \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{-x^2/y}$, $H = \{(x, y) \mid y > 0\}$.

   *a*) Prueba que la cerradura de $H$ es el conjunto $\overline{H} = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$.

   *b*) Prueba que $f$ puede extenderse a una función continua en el conjunto $\overline{H} \setminus \{(0, 0)\}$.

   *c*) Prueba que no existe una extensión continua de $f$ a todo $\overline{H}$.

3. (15 ptos.) Prueba o da un contraejemplo:

   *a*) Si $n^2 a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces $\sum a_n$ converge.

   *b*) Si $\sum a_n$ converge, entonces $\sum a_n^2$ converge.

4. (15 ptos.) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que $|f'(x)| \leq c$ para toda $x \in (a, b)$. Prueba que $f$ es uniformemente continua en $(a, b)$.

5. (15 ptos.) Usa el método de multiplicadores de Lagrange para resolver el siguiente problema: un tubo cilíndrico debe contener un volumen fijo $V$, pero su superficie (incluyendo la tapa y el fondo) debe ser lo más pequeña posible. Encontrar las dimensiones del tubo en función de $V$.

6. (25 ptos.)

   *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Determina qué puntos de $\mathbb{R}^2$ tienen una vecindad para la cual, al restringir $f$ a esa vecindad, $f$ tiene una inversa diferenciable. Denota esta inversa como $P(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$.

   *b*) Prueba que
   $$\nabla\theta(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}).$$

*c*) Demuestra el siguiente teorema:
Sea $V : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en el abierto $U$, $\gamma : [0,1] \to U$ una curva regular cerrada. Si $V = \nabla g$ para alguna $g : U \to \mathbb{R}$, entonces

$$\int_\gamma V \cdot T \; ds = 0,$$

donde $T = \gamma'/\|\gamma'\|$ es el tangente unitario a la curva $\gamma$.

*d*) Sea $W(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcula

$$\int_C W \cdot T \; ds$$

donde $C$ es la circunferencia de radio 1 recorrida en la dirección contraria a las manecillas del reloj; en particular, verifica que esta integral es distinta de cero ¿Por qué no contradice esto al resultado del inciso anterior?

7. (15 ptos.) Calcula

$$\int_{\mathcal{E}} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dxdy$$

donde la región $\mathcal{E}$ se define como

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$