EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA LINEAL

Maestría en Matemáticas Básicas, CIMAT, 11 de enero de 2006

Responde las siguientes preguntas:

1) Considera la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Aplica el método de eliminación Gaussiana para obtener la factorización $A = LDU$.

2) Especifica el dominio y el contradominio de A en (1) vista como transformación lineal, así como sus cuatro espacios fundamentales:

$$Ker(A), Im(A), Ker(A^t), (ImA^t) \tag{2}$$

Da una base de cada uno de estos subespacios, y en el caso de las imágenes, utilizando exclusivamente vectores columna de las matrices correspondientes. Analiza las propiedades de ortogonalidad entre bases de los espacios vectoriales en (2).

Resuelve la ecuación

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

En caso de que la ecuación (3) no se pueda resolver, explica por qué; explica cómo se resuelve el problema por el método de mínimos cuadrados (interpretación geométrica y algoritmo) y resuélvelo.

Calcula (o da una expresión para calcular) la proyección en la Imagen de A y calcula quién es la proyección v de $e := (1, 1, 1)$ en $Im(A)$, cuánto vale $|v - e|$ y cuál es su interpretación en términos de la ecuación (3).

3) Sea V un espacio vectorial con producto interior $< , >$. Sea $A : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Define qué quiere decir que A sea auto-adjunta en el espacio $(V, < , >)$.

Sea V el espacio vectorial de dimensión 3 formado por polinomios de grado menor o igual que 2:

$$V := \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \ / \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$