Examen General de Análisis I
enero 2007
Duración: 4 hrs.

Los problemas tienen indicado su valor y el examen se aprueba 100 con puntos.

1. Sea X un espacio métrico; prueba o da un contraejemplo

   (a) (15 puntos) Sean $A, B, C \subset X$ conexos tales que $A \cap C \neq \emptyset$ y $B \cap C \neq \emptyset$; entonces $A \cup B \cup C$ es conexo.

   (b) (10 puntos) La intersección de cualquier número de conjuntos compactos en X es un conjunto compacto.

   (c) (10 puntos) La unión de cualquier número de conjuntos compactos en X es un conjunto compacto.

2. (a) (10 puntos) Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión convergente a cero. Demuestra que tiene una subsucesión $\{a_{n_i}\}$ tal que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ converge.

   (b) (10 puntos) Indica si la serie en $\mathbb{R}^2$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2 - 3n + 1}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n}\right)$ converge.

3. (10 puntos) Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (1 + x + y, 3 - 2x - y)$ es uniformemente continua.

4. (a) (15 puntos) Prueba que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 sen\frac{1}{x}, y\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ (0, y) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   es derivable en $(0, 0)$.

   (b) (10 puntos) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Calcula la derivada de $f(x, y) = \int_y^{xseny} \phi(t)\, dt$.

5. (a) (10 puntos) Enuncia el teorema de la función inversa para una aplicación de dos variables (i.e. para una $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

   (b) (10 puntos) Enuncia el teorema de la función implícita para una función
   $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (c) (15 puntos) Usa el enunciado del inciso a. para demostrar el de b.

6. (15 puntos)Calcula $\int\int_S (\nabla \times F) \cdot \widehat{n}\, d\sigma$ donde S es la parte de la superficie de la esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y $z \geq 2$, $F = \phi \times \left(\widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}.\right)$ y $\phi = x\widehat{i} + y\widehat{j} + z\widehat{k}$.

7. (10 puntos) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Prueba que si f se anula en tres puntos distintos, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.