Exámen General de Análisis I, Enero 2008

Cada problema vale 15 puntos. Para aprobar el exámen necesita 70 puntos

1) Sean $A, B \subset \mathbf{R}^n$ conjuntos cerrados y disjuntos.

a. Probar que si B es compacto existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in A$, $y \in B$ entonces $d(x, y) > \varepsilon$.

b. Es cierto lo anterior si B no es compacto? Probarlo o dar un contraejemplo.

2) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$ y $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Calcular $\int_A f$.

3) Probar que si $A \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto infinito numerable entonces A no es conexo.

4) Sea $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$. Para una función $f : A \to \mathbf{R}$ y $c \in \mathbf{R}$ llamamos $C(f, c)$ a la clausura de $f^{-1}(c)$. Dar un ejemplo de una función $f : A \to \mathbf{R}$ tal que $C(f, 1), C(f, 2)$ sean conjuntos con volumen (sus funciones características son integrables Riemann) y tengan volumen $2/3$. Probar que cualquier función que satisfaga esta condición no es integrable (Riemann).

5)Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ de clase C^1 tal que para todo $x \in \mathbf{R}^3$ $D_x(f)$ tiene rango 2. Probar que la imagen de f es un conjunto abierto.

6) Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una función de clase C^1, $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto acotado y de medida 0. Probar que $f(A)$ tiene medida 0.

7) Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Sea $a_n = f(1/n^2)$. Probar que la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.