Examen General de Análisis 2009

Cada problema sin incisos vale 1 punto y cada inciso de un problema vale 1 punto. Con 7 puntos aprueba el examen.

1. Sea $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; use esta expresión para probar que $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$ y justifique su respuesta.

2. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(e^{x+y}, sen\,(x-y), \left(x^2+y^2\right) sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

3. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones crecientes. Pruebe o dé un contraejemplo:

   (a) Si $f_n \to 0$ puntualmente, f_n converge uniformemente.

   (b) Si f_n converge puntualmente a f (cualquier función), f_n converge uniformemente.

4. Sean X y Y espacios normados. Extienda la definición de función diferenciable en un punto a funciones de $X \to Y$, de la siguiente manera: $f : X \to Y$ es diferenciable en $x_0 \in X$ si existe una función lineal continua $T_{x_0} : X \to Y$ tal que

$$\lim_{y \to x_0} \frac{\|f(y) - f(x_0) - T_{x_0}(y - x_0)\|}{\|y - x_0\|} = 0. \tag{1}$$

   (a) Pruebe que si $f : X \to Y$ es diferenciable en $x_0 \in X$, entonces la función lineal continua T_{x_0} que satisface (1) es única.

   (b) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ el espacio normado de las funciones reales continuas de A en $\mathbb{R}$ con $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$ Dado $x_0 \in A$, sea $\delta_{x_0} : \mathcal{C}(A, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$. Pruebe que δ_{x_0} es diferenciable.

5. Considere el sistema

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ 2xy^3 + u^2z &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Pruebe que el sistema anterior define a x, y como funciones implícitas de z, u de manera diferenciable, en una vecindad del punto $(x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$.

   (b) Si $x = h(z, u)$, y $y = g(z, u)$ son las funciones cuya existencia en una vecindad de $(0, 1, 0, 1)$, se probó en (a), demuestre que la función $F(z, u) = (h(z, u), g(z, u))$ tiene una función inversa diferenciable en una vecindad del punto $(0, 1)$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable con derivada continua tal que NO existe $x \in \mathbb{R}$ con $f(x) = f'(x) = 0$. Entonces $\{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ es finito.

7. Muestre que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ son Riemann integrables, entonces el producto interior $\langle f, g \rangle$ es Riemann integrable.

8. Sea (S, d) un espacio métrico conexo no acotado. Demuestre que para toda $a \in S$ y para toda $r > 0$, $\{x \in S : d(x, a) = r\}$ es no vacío.