Examen General de Análisis I, 15 enero 2010
Duración 4 hrs

Con 28 puntos apruebas.

1. (5 p) Prueba que cualquier función monótona $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ que satisface la propiedad del valor intermedio es continua.

2. (6 p) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en x_0, entonces
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} = (\alpha + \beta) f'(x_0).$$

3. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 0$ si $f(0,0) = 0$ y $f(x,y) = (xy)^n \, sen \dfrac{1}{x^4 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Di cuál es la mínima n, en cada uno de los incisos siguientes, de forma que
   (a) (2 p) f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$,
   (b) (2 p) f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$,
   (c) (2 p) f tiene derivadas parciales continuas en todo punto de $\mathbb{R}^2$

4. (5 p) Determina los valores de h para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)\log(n+1)}$ converge uniformemente en $\{x : |x| \leq h\}$.

5. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|$ converge.
   (a) (2 p) Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nx)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$.
   (b) (4 p) Define $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$ y prueba que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nx)$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

6. Sean $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ el conjunto de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ con la métrica $d(A,B) = \|A - B\|$ y $f : L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definida por $f(A) = A^2$.
   (a) (3 p) Calcula la derivada de f explicando cómo sabes que f es diferenciable y dando una fórmula para $f'(A)\,B$, con $A, B \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
   (b) (1 p) Prueba que f es localmente invertible cerca de la identidad I.
   (c) (3 p) Pueba que si A es la transformación lineal con matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^2 = I$ y la función f no es localmente invertible en A.

7. (5 p) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Usa el teorema de Fubini para probar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. (Sugerencia: Usa el teorema de Fubini para ver que $\int_A \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = 0$ para cualquier rectángulo A.)