Examen general de Análisis I
julio 2010

Duración 4 horas. Con 35 puntos apruebas.

1. (a) (5p)Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos compactos y conexos con $F_{n+1} \subset F_n$; entonces $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ es conexo.
   (b) (5p) Da un ejemplo de una sucesión $\{F_n\}_n$ de conjuntos cerrados y conexos con $F_{n+1} \subset F_n$ y tal que $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ no es conexo.

2. (5p) Sea $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. ¿Es f acotada? Prueba tu respuesta.

3. (5p) Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ de manera que $f(c) = g(c) = h(c)$ y $f'(c) = g'(c) = h'(c)$. Si A_1, A_2, A_3 es una partición de $\mathbb{R}$ y

$$L(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_1 \\ g(x) & \text{si } x \in A_2 \\ h(x) & \text{si } x \in A_3 \end{cases}$$

   prueba que L es diferenciable en c.

4. (5p) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótonamente creciente. Prueba que es Riemann integrable.

5. Dos métricas ρ y σ en un conjunto X son equivalentes si la identidad $I : (X,\rho) \to (X,\sigma)$ es un homeomorfismo.

   Sean (X,ρ) un espacio métrico y $\sigma = \frac{\rho}{1+\rho}$.

   (a) (8p) Prueba que σ define una métrica equivalente a ρ en X.
   (b) (2p) Prueba que (X,σ) es un espacio métrico acotado.

6. Sea la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \phi(ax + by + cz)$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continuamente derivable tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = 1$.

   (a) (3p) Prueba que la ecuación anterior define a z como una función derivable f de x y y en una vecindad de $(0,0)$.
   (b) (7p) Si suponemos que ϕ es de clase C^2 calcula $D_x f(0,0)$ y $D_{xx} f(0,0)$.

7. (5p) Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples suaves a trozos en $\mathbb{R}^2$ que no se intersecten y que contengan al cero en el interior de la región que acotan, $M(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ y $N(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Prueba que

$$\int_{\overrightarrow{C_1}} (Mdx + Ndy) = \int_{\overrightarrow{C_2}} (Mdx + Ndy).$$