Examen General Análisis I

Julio 2011

Duración 4 hrs

Se aprueba con 38 puntos.

1. Sean S, T espacios métricos y $f : S \to T$ uniformemente continua.

   (a) (5 puntos) Si $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy en S, entonces $\{f(x_n)\}$ es sucesión de Cauchy.

   (b) (5 puntos) De un ejemplo de f continua y no uniformemente continua tal que $\{x_n\}$ es sucesión de Cauchy en S y $\{f(x_n)\}$ no es sucesión de Cauchy.

2. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua con $\partial_y f$ continua. Definimos $F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt$

   (a) (5 puntos) Encuentre $\partial_x F$ y $\partial_y F$

   (b) (5 puntos) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t, x)dt$ encuentre $G'(x)$.

3. (5 puntos) Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 4x^2 + 9y^2 \leq 4\}$. Use un cambio de variable adecuado para calcular

$$\int_B e^{-4x^2-9y^2} dxdy = \frac{\pi}{6}(1 - e^{-4})$$

4. Pruebe que

   (a) (5 puntos) $\sum x^n(1-x)$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$.

   (b) (5 puntos) $\sum(-1)^n x^n(1 - x)$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

5. (a) (5 puntos) Pruebe que el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

   define implícitamente una función $F(x) = (y(x), z(x))$ en una vecindad del punto $(3, 4, 5)$.

   (b) (5 puntos) Si $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$ es la curva definida por a., calcule la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = e^{xy} + z^2$ en la dirección del vector tangente a α en el punto $(3, 4, 5)$.

6. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y $g, h : U \to \mathbb{R}$, $g, h \in C^{(2)}(U)$. Considere el campo vectorial $F = g\nabla h$.

   (a) (3 puntos) Muestre que la divergencia de F está dada por

   $$\nabla \cdot F = g\nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h)$$

   donde $\nabla^2 h = \nabla \cdot \nabla h = \sum \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}$ es el Laplaciano de h.

   (b) (5 puntos) Sea Ω subconjunto cerrado de U y $\partial\Omega$ es orientada positiva. Aplique el Teorema de la divergencia para probar que

   $$\int_\Omega g\nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h) dV = \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial h}{\partial n} dA$$

   donde $\frac{\partial h}{\partial n} = \nabla h \cdot n$.

   (c) (2 puntos) Intercambiando h y g y restando los resultados, muestre que

   $$\int_\Omega g\nabla^2 h - h\nabla^2 g dV = \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial g}{\partial n} dA$$