Examen General Análisis I

Enero 2012

Duración 4 hrs

Los problemas tienen indicado su valor y el examen se aprueba 60 con puntos.

1. Sea (M, d) espacio métrico. Sea A un conjunto no vacío de M. Definimos la distancia de x a A por

$$d(x, A) = inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

   Muestra

   (a) (4p) Si $A \neq \varnothing$, entonces $\bar{A} = \{x \in M : d(x, A) = 0\}$

   (b) (3p) Si $A \neq \varnothing$ y $x, y \in M$ entonces $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

   (c) (3p) Si $A, B \subset M$ cerrados disjuntos, entonces la función

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

   es continua en M, además $f(A) = \{1\}$ y $f(B) = \{0\}$.

2. Prueba que

   (a) (5p) Si $a_n > 0$ para todo n, entonces

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

   (b) (5p) Si $a_n \geq 0$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

   (c) (5p) Si $\sum a_n$ converge y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\sum a_n b_n$ converge.

3. (10p) Sea $f : M \to N$ una función continua, donde M, N espacios métricos. Muestra que

$$f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)}$$

   para todo subconjunto $E \subset M$. Muestra que la inclusión puede ser propia.

4. (10p) Muestra que si $f \in C(\mathbf{R})$ es periodica, entonces f es uniformemente continua.

5. (10p) Sean f_n y g_n que convergen uniformemente en $[a, b]$ a las funciones f y g respectivamente. Si ambas sucesiones son uniformemente acotadas, entonces $f_n g_n$ converge uniformemente a fg.

6. (10p) Una transformación $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ es analítica en un conjunto S si ésta es continuamente diferenciable, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Muestra que si f es analítica, uno a uno y $Jf(x) \neq 0$ para toda $x \in S$, entonces f^{-1} es analítica en $f(S)$.

7. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continua y $\partial_y f$ continua. Definimos $F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt$

   (a) (5p) Encuentra $\partial_x F$ y $\partial_y F$

   (b) (5p) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t, x)dt$ encuentra $G'(x)$.

8. (10p) Calcula $\int_S (\nabla \times F) \cdot n d\sigma$ donde S es la parte de la superficie de el hiperboloide dado por $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ y $2 \geq z \geq 0$, y el campo dado por $F = \varphi \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ y $\varphi = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.