1. Sea (K,d) un espacio métrico compacto y $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$. Prueba que f es continua si y sólo si su gráfica $\Gamma_f \subset K \times \mathbb{R}$ es compacto.

2. Demuestra que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes es convergente.

3. Define la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x}{1+nx^2} \\ n &= 1,2,3,.. \end{aligned}$$

   Demuestra que converge uniformemente a una funcion f y que la ecuación

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

   se satisface para toda $x \neq 0$, pero no para $x = 0$.

4. Prueba que si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones de funciones acotadas en un espacio métrico, E, que convergen uniformemente, entonces $\{f_n g_n\}$ también converge uniformemente.
   Considera las funciones $f_n(x) = x\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $g_n(x) = 1/n$ si $x \notin \mathbb{Q}$ y $g_n(x) = b$ si $x = a/b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, con $(a,b) = 1$ y con $E = (0,1)$ para mostar que no se puede suprimir la condición de acotamiento de las sucesiones.

5. Demuestra que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es creciente, entonces f es integrable en el sentido de Riemann.

6. Define $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

   si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Demuestra que todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ existen, pero f no es derivable en $(0,0)$.

7. Usa el teorema del valor intermedio para demostrar el teorema de la función implícita para el caso de una función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1.

8. Sea f una función definida en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$ diferenciable. Asociándole el campo vectorial $F = (f,0,0)$, usa el teorema de la divergencia para obtener la siguiente interpretación geométrica del gradiente de f

$$\nabla f(P) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{V} \int\int_{S(r)} fndS$$

   donde $S(r)$ es la superficie de la bola de radio r centrada en P y n es el vector normal unitario exterior a la bola.