EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA LINEAL
Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT
7 de enero de 2015

1. Sea $V \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial del espacio euclideano $(\mathbb{R}^4, <, >)$ definido por las ecuaciones siguientes:
$$x + 6z = 0, \quad x + 2y + 6z + 4w = 0, \quad \frac{1}{2}y + w = 0.$$
   a) Calcula una base ortonormal para V y para $V^\perp$.
   b) Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial del espacio euclideano $(\mathbb{R}^3, <, >)$ formado por los vectores (a, b, c) tales que el sistema de ecuaciones
$$x + 6z = a, \quad x + 2y + 6z + 4w = b, \quad \frac{1}{2}y + w = c.$$
   sí tiene solución. Calcula una base ortonormal para W y para $W^\perp$.
   c) Calcula las matrices cuadradas que representan las proyecciones de $\mathbb{R}^4$ sobre V y sobre $V^\perp$ respectivamente, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   d) Plantea el problema de mínimos cuadrados asociado al sistema de ecuaciones del inciso *b*) anterior y especifica cuándo tiene solución exacta y cuándo sólo aproximada.
2. Sea E un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo K y sea $T : E \longrightarrow E$ una transformación lineal tal que $T^k = 0$ para algún entero positivo k. Demuestra que $T^n = 0$.
3. Sean A una matriz $n \times 1$ y B una matriz $1 \times n$, con coeficientes en un campo K. Demuestra que el producto AB no es invertible para todo $n > 1$.
4. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Calcula la forma canónica de Jordan J de A.
   b) Calcula una matriz invertible Q tal que $Q^{-1}AQ = J$.
   c) Calcula e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, la exponencial de la matriz tA.
   d) Resuelve la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con condición inicial $x(0) = (1, 1, 1)$.
5. Considera la siguiente forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$:
$$x^2 - xy - yz + z^2.$$
   Calcula la matriz simétrica que representa a la forma bilineal simétrica asociada, así como el rango y la signatura de la forma bilineal.