EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA LINEAL
Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT
Viernes 3 de julio de 2015

1. Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial del espacio euclideano $(\mathbb{R}^3, <,>)$ formado por los vectores (a, b, c) tales que el sistema de ecuaciones
$$x + 3y = a, \quad x + 3y + 2z + 4w = b, \quad z + 2w = c.$$
sí tiene solución.
   a) Calcula una base ortonormal para W y una para $W^\perp$.
   b) Calcula las matrices cuadradas que representan las proyecciones de $\mathbb{R}^3$ sobre W y sobre $W^\perp$ respectivamente, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   c) Plantea el problema de mínimos cuadrados asociado al sistema de ecuaciones anterior y especifica cuándo tiene solución exacta y cuándo sólo aproximada.
2. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $T : E \longrightarrow E$ una transformación lineal con polinomio característico $C_T(x) = x^3(x-1)^6$ y polinomio mínimo $m_T(x) = x^2(x-1)^3$.
   a) ¿De qué dimensión es E?
   b) Calcula todas las posibles formas canónicas de Jordan que T puede tener.
3. Sean K un campo e $I_n \in M_{n\times n}(K)$, la matriz identidad.
   a) Se dice que una matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ es *ortogonal* si $AA^t = I_n$. Probar que si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.
   b) Se dice que una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es *unitaria* si $AA^* = I_n$, donde A^* denota la conjugada transpuesta de A. Probar que si A es unitaria, entonces $\det(A)$ es un número complejo de módulo 1.
4. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Calcula la forma canónica de Jordan J de A.
   b) Calcula una matriz invertible Q tal que $Q^{-1}AQ = J$.
   c) Calcula e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, la exponencial de la matriz tA.
   d) Resuelve la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax$ con condición inicial $x(0) = (1, 1, 1)$.
5. Considera la siguiente forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$:
$$x^2 - xy - yz + z^2.$$
Calcula la matriz simétrica que representa a la forma bilineal simétrica asociada, así como el rango y la signatura de la forma bilineal.