EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA LINEAL

Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT
Junio-Julio de 2014

Cada pregunta vale dos puntos.
La calificación aprobatoria es de siete y medio puntos.

1. Sean $f(0), f(1)$ números reales dados y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función definida inductivamente (a partir de $f(0), f(1)$) por $f(n+1) = 5f(n) - 6f(n-1)$. Utilizando la relación:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$$

encontrar una expresión explícita para $f(n)$ en términos de $f(0)$ y $f(1)$.

2. Sean E, F y G, espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K. Sea E^* el espacio dual de E y, si H es un subespacio de G, sea $H^\perp$ el complemento ortogonal de H en G. Sea $f : E \longrightarrow F$ una transformación lineal y sea $f^* : F^* \longrightarrow E^*$ la transformación dual de f.

   a) Indica cuáles son las relaciones entre los subespacios $(\mathrm{Im} f)^\perp, \mathrm{Nuc} f^*, (\mathrm{Nuc} f)^\perp$ e $\mathrm{Im} f^*$ (Nuc denota núcleo e Im denota Imagen).

   b) Sea ahora $f : E \longrightarrow E$ una transformación lineal y supongamos que existen $0 \neq \alpha \in E$ y $c \in K$ tales que $f(\alpha) = c\alpha$. Demuestra que existe $0 \neq g \in E^*$ tal que $f^*(g) = cg$.

3. Sean

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que el sistema de ecuaciones $Bx = b$ no tiene solución y calcula la mejor aproximación $\hat{x}$ a una solución por el método de mínimos cuadrados. Calcula $p = B\hat{x}$ y verifica que el error $b - p$ es perpendicular a la imagen de B.

4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y T el endomorfismo (transformación lineal) inducido por A en $\mathbb{R}^5$.

   a) Calcula el polinomio característico de A.

   b) Calcula el polinomio mínimo de A

   c) Calcula la forma canónica de Jordan J de T.

   d) Encuentra una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^5$ en la que T tenga por matriz a la matriz J del inciso anterior.

5. Para $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se define *la transpuesta hermitiana* A^H de A como $A^H = (a_i^j)^H = (\overline{a_j^i})$, donde $\overline{z} = a - ib$ denota al conjugado de $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^H = -A$ y sea $B = \exp(A)$. Demuestra que:

a) $\det(B) = e^{tr(A)}$ (el determinante de B es la exponencial de la traza de A).

b) $B^H = \exp(-A)$.

c) $BB^H = I_{n\times n}$, la matriz identidad.

Sugerencia: Demuestra que A es normal, es decir, que $A^H A = AA^H$.