EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA LINEAL

Maestría en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT
2 de julio del 2012

1. Sean
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Demuestra que el sistema de ecuaciones $Bx = b$ no tiene solución y calcula la mejor aproximación a una solución por el método de mínimos cuadrados.

2. Sea E un espacio vectorial de dimensión (finita) n sobre un campo K y sea $T : E \longrightarrow E$ una transformación lineal tal que $T^k = 0$ para algún entero positivo k. Demuestra que $T^n = 0$.

3. Sea E un espacio vectorial de dimensión (finita) n sobre un campo K y E' su dual. Sean $\ell_1, \ldots, \ell_k \in E'$ y F el subespacio de E definido por: $F = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Nuc}(\ell_j)$.
   a) Probar que $\dim F \geq n - k$.
   b) Probar que $\dim F = n - k$ si y sólo si $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ es linealmente independiente.

4. Sean
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
y $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ la transformación lineal inducida por A (T es un *endomorfismo* de $\mathbb{R}^5$).
   a) Calcula el polinomio característico de A.
   b) Calcula el polinomio mínimo de A.
   c) Calcula la forma canónica de Jordan J de T.
   d) Calcula una base $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^5$ en la que la matriz de T sea la matriz J del inciso anterior.
   e) Calcula una matriz invertible Q tal que $Q^{-1}AQ = J$.

5. Para $A = (a_i^j) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, se define *la transpuesta hermitiana* A^H de A como $A^H = (a_i^j)^H = (\overline{a_j^i})$, donde $\overline{z} = a - ib$ denota al conjugado de $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
   Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^H = -A$ y sea $B = \exp(A)$. Demuestra que:
   a) $\det(B) = e^{tr(A)}$.
   b) $B^H = \exp(-A)$.
   c) $BB^H = I_{n\times n}$, la matriz identidad.
   Sugerencia: Demuestra que A es normal, es decir, que $A^H A = AA^H$.