Examen General
Análisis II

5 julio, 2013

Aségurate de exponer con detalle tus argumentos y de enunciar con cuidado los teoremas que utilices.

Tienes un máximo de 4 horas para resolver el examen. Con 63/90 se aprueba.

En todos los ejercicios m denota la medida de Lebesgue y mensurabilidad de conjuntos o funciones es respecto a dicha medida.

1. (10 pts) Define $A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$, la diferencia simétrica de A y B. Para $A \subset \mathbb{R}^n$, si existe un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $m^*(A \triangle E) = 0$, prueba que A también es medible y que $m(A) = m(E)$.

2. (10 pts) Falso o Verdadero (demuestra o construye un contraejemplo): si $E \subset \mathbb{R}$ es medible con $m(E) = 1$, entonces E es acotado.

3. *a*) (10 pts) Sean $C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : C \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Prueba que si $f = g$ en casi todas partes, entonces, de hecho, $f = g$.

   b) (5 pts) ¿Seguirá siendo cierto el inciso anterior si remplazas C por cualquier medible $E \subset \mathbb{R}^n$? Prueba o da un contraejemplo.

4. (10 pts) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles, definidas en el conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$. Sea $E_0 = \{x \in E \mid \ \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$. ¿Necesariamente E_0 es medible? Prueba o da un contraejemplo.

5. (10 pts) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $f_n \to f$ uniformemente en E y $m(E) < \infty$, prueba que f es integrable y que $\int_E f_n \to \int_E f$.

6. (10 pts) Si f es integrable en $E \subset \mathbb{R}^n$ y $\int_B f = 0$ para todo medible $B \subset E$, prueba que $f = 0$ c.t.p.

7. Sea f integrable sobre $\mathbb{R}$.

   a) (10 pts) Prueba que la función definida como

   $$F(x) = \int_{(-\infty,x)} f$$

   está bien definida y es continua en $\mathbb{R}$.

   b) (5 pts) ¿Es F necesariamente Lipschitz?

8. (10 pts) Sean $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ medible y $f \geq 0$. Sea $A = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$ el conjunto "bajo la gráfica de f". Prueba que A es medible y que $m(A) = \int_E f$.