ANÁLISIS FUNCIONAL
EXAMEN GENERAL
VIERNES 6 DE JULIO DE 2012.

Nombre: ____

Instrucciones:

- El presente examen consta de siete (**7**) problemas. Resuélvalos **todos**.
- Cada problema vale **20 puntos**, para un total de **140 puntos**.
- Tiene cuatro (**4**) horas para resolver el examen.
- Muestre todo su trabajo y explique con cuidado sus respuestas.
- **Respuestas no justificadas en detalle no tendrán valor alguno.**

---

(1) Pruebe que el espacio $C([a,b])$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y con la norma del máximo, $\|u\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |u(x)|$, no es un espacio de Hilbert.

(2) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean también $x, y \in \mathcal{H}$. Demuestre que: $x \perp y$ si, y solo si, $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$.

(3) (a) Sean $g, h \in L^2(0,1)$. Demuestre que el funcional

$$\phi : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$$

definido por

$$\phi(f) = \int_0^1 g(t) \left(\int_0^t h(s) f(s) ds \right) dt$$

es un funcional contínuo.

(b) Encuentre $F \in L^2(0,1)$ tal que represente el funcional ϕ anterior.

(4) Sean X y Y dos espacios de Banach. Demuestre que el mapeo

$$T \longrightarrow T',$$

donde T' es el operador adjunto (de Banach) de T, es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(X, Y)$ en $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(5) Sea X un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Demuestre que $\sigma(T)$ es compacto y está contenido en el disco $\lambda \leq \|T\|$. Ésto implica, como corolario, que $\rho(T) \neq \emptyset$.

(6) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Demuestre que toda sucesión ortonormal en $\mathcal{H}$ converge débilmente a 0.

(7) Sea X un espacio de Banach. Demuestre que una sucesión débil-$\star$ convergente es acotada.