CIMAT | Examen General | Julio 3, 2013

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I

Instrucciones: Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito. Inicia cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa tus respuestas en la esquina superior izquierda. Escribe tu nombre en cada una de tus hojas de respuestas. Tiempo total: 4hrs.

1. Muestra que todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias son periódicas:

$$u_1' = u_2(1 + u_1^2 + u_2^2),$$
$$u_2' = -u_1(1 + u_1^2 + u_2^2).$$

2. Considera el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= |y|^{1/2}x, \\ \dot{y} &= f(y), \end{aligned}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \mapsto f(y)$ es una función Lipschitz en todo $\mathbb{R}$. Demuestra que el sistema tiene a lo más una solución en un intervalo que contenga al origen. (Sug.: Desigualdad de Gronwall.)

3. Determina la estabilidad (en el sentido de Lyapunov) de los puntos de equilibrio asociados a la ecuación $x'' + (x')^3 + x = 0$.

4. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 y considera el sistema $\bar{x}' = F(\bar{x})$, el cual tiene una primera integral cuyas hipersuperficies de nivel son conjuntos compactos. Demuestra que el sistema de ecuaciones tiene un flujo definido para toda $t \in \mathbb{R}$.

5. Sea $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ y $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Considera el sistema de ecuaciones lineales $\bar{v}' = A(t)\bar{v}$. Demuestra que ninguna solución del sistema puede diverger a infinito en tiempo finito.

6. Determina la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ y dibuja el retrato fase del sistema

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y, \\ y' &= -2x + 5y. \end{aligned}$$