Examen General de Ecuaciones Diferenciales.

Ejercicio 1
a) La población de una especie de peces obedece la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2,$$

con $0 < b << a$; muestre que, independientemente de la población inicial (positiva), la población se estabiliza alrededor de un cierto valor E. Calcule E.

b) Si hay una pesca a tasa constante C la ecuación es

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 - C.$$

Muestre que si C es chica y la población inicial es grande, la población se estabiliza y que, por el contrario, si la población inicial es chica la especie se extingue. ¿ Cuán grande debe ser la población en términos de a, b y C?.
Muestre que si C es grande, no importa la población inicial, la población se extingue. ¿ Cuán grande debe ser C en términos de a y b?.

Ejercicio 2 Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $\lim_{x\to\infty} V(x) = \infty$ pruebe que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla V(x)$$

tiene soluciones definidas para todo tiempo positivo.

Ejercicio 3 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} X \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 Dada una función diferenciable $f(x)$, se define el operador de Picard

$$P_{f(x)}(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$

a) Explique la relación del operador de Picard con el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales.
b) Empezando con la constante x_0 calcule las primeras tres iteradas para la fucion $f(x) = x$.

Ejercicio 5 Realizar el espacio fase del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Ejercicio 6 Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$y = C \sin x,$$

donde C es una constante.