EXAMEN GENERAL DE ANÁLISIS II
ENERO 2018

Elegir 7 problemas

1. Enuncie los teoremas de convergencia monótona, convergencia dominada y lema de Fatou. De la demostración de uno de ellos.

2 .Pruebe que si f es una función real tal que los conjuntos $\{f \geq r\}$ son medibles para todo r racional, entonces la función es medible.

3. Muestre que todo compacto K contenido en $\mathbb{R}$ es el soporte de una medida de Borel

4. Pruebe que si X tiene medida finiita y f_n es una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a f, entonces para todo ϵ existe un conjunto E tal que la medida de $X - E$ es menor que ϵ y que en E la convergencia es uniforme.

5. Si E es un subconjunto Lebesgue-medible de R con medida positiva entonces E contiene un conjunto no-medible.

6. Usa el Teorema de Fubini y la relación

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-st} dt, \quad x > 0$$

para demostrar que

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{sen\, x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

7. Muestre que $(\int |f|^1 d\mu)$ es una norma en el el espacio de funciones $L^1(\mu)$. Muestre que si f_n es de Cauchy entonces tiene un limite.

8. Determina los límites siguientes, justifica los cálculos.
(1) $\lim \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n}\, sen\,(x/n)\, dx$,
(2) $\lim \int_0^\infty (1 + nx^2)\,(1 + x^2)^{-n}\, dx$,