Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Maestrías en Matemáticas Básicas y Aplicadas, CIMAT.
7 de enero de 2013

1. Da un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que no satisfaga las condiciones del Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones: exhibe una condición inicial
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0'$$
y dos soluciones de la ecuación que la satisfagan.

2. Calcula la exponencial e^A de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Encuentra la matriz A sabiendo que
$$e^{A\cdot t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^t + e^{2t} & e^{5t} \\ e^{2t} & 3e^t + e^{2t} & 0 \\ 0 & 3e^t & e^{5t} \end{pmatrix}.$$

4. Considera el sistema
$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 + \mu x \\ y' &= -x. \end{aligned}$$
Demuestra que para todo $\mu > 0$ existe una solución periódica del sistema y que para todo $\mu \leq 0$ no existe ninguna solución periódica.

5. Sean $W \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 y $x_0 \in W$ un punto de equilibrio del sistema dinámico $x' = F(x)$.
   Sea V una función de clase C^1 con valores reales, definida en una vecindad $U \subset W$ de x_0, tal que
   a) $V(x_0) = 0$ y $V' > 0$ en $U \setminus \{x_0\}$.
   b) Existe una sucesión $\{x_n\}$ que converge a x_0 tal que $V(x_n) > 0$.
   Demuestra que x_0 es un equilibrio *inestable*.