1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente.

   (a) Pruebe que $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica.

   (b) Pruebe que si $f$ no es continua, $d$ no es equivalente a la métrica euclidena (dada por $|x - y|$).

   (c) Pruebe que si $f$ es continua, $d$ es equivalente a la métrica euclideana.

2. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(e^{x+y}, sen(x-y), \left(x^2+y^2\right) sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) &= (1,0,0) \end{aligned}$$

3. Sea $\mathcal{B} = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f \text{ tiene derivada continua en } (0,1),$ $f(0) = 0 \text{ y } |f'(x)| \leq 1 \forall x \in [0,1]\}$. Pruebe que $\mathcal{B}$ es compacto.

4. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones crecientes. Pruebe o de un contraejemplo:

   (a) Si $f_n \to 0$ puntualmente, $f_n$ converge uniformemente.

   (b) Si $f_n$ converge puntualmente a $f$ (cualquier función), $f_n$ converge uniformemente.

   (a) Enuncie un resultado que garantice que la operación siguiente sea válida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_a^b g_k(x)\, dx \right) = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \right) dx.$$

   (b) Sea $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ; use a) para probar que $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$.

5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Si $A$ es una componente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash S$, pruebe que $\mathbb{R}^n \backslash A$ es conexo.

6. Sean $X$ y $Y$ espacios normados. Extienda la definición de función diferenciable en un punto a funciones de $X \to Y,$ de la siguiente manera: $f : X \to Y$ es diferenciable en $x_0 \in X$ si existe una función lineal continua $T_{x_0} : X \to Y$ tal que

$$\lim_{y \to x_0} \frac{\|f(y) - f(x_0) - T_{x_0}(y - x_0)\|}{\|y - x_0\|} = 0. \tag{1}$$

   (a) Pruebe que si $f : X \to Y$ es diferenciable en $x_0 \in X$, entonces la función lineal continua $T_{x_0}$ que satisface (1) es única.

   (b) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ el espacio normado de las funciones continuas de $A$ en $\mathbb{R}$. Dado $x_0 \in A$, sea $\delta_{x_0} : \mathcal{C}(A, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$. Pruebe que $\delta_{x_0}$ es diferenciable.

7. Sean $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ el espacio normado de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ y $\mathcal{F} : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pruebe o de un contraejemplo

   (a) Si $\mathcal{F}(f) = gf$ (producto de $g$ y $f$), entonces $\mathcal{F}$ es continua.

   (b) Si $\mathcal{F}(f) = gf$ (producto de $g$ y $f$), entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente continua.

   (c) Si $\mathcal{F}(f) = f^2$, entonces $\mathcal{F}$ es continua.

   (d) Si $\mathcal{F}(f) = f^2$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente continua.

8. Considere la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = \phi(ax + by + cz), \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0, \tag{2}$$

   donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1$ tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi'(0) = 1$.

   (a) Pruebe que (2) define a $z$ como función implícita diferenciable en términos de $x$ y $y$ en una vecindad del $(0,0,0)$.

   (b) Si $z = f(x, y)$ es la función definida implícitamente por (2) en una vecindad de $(0,0,0)$, entonces en esa vecindad se cumple

$$(cy + bz) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (az - cx) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = bx - ay.$$

   (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(a) Pruebe que el sistema

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2u^3 &= 1 \\ 2xy^3 + u^2z &= 0 \end{aligned}$$

define a $x, y$ como funciones implícitas de $z, u$ de manera diferenciable, en una vecindad del punto $(x, y, z, u) = (0, 1, 0, 1)$.

(b) Si $x = h(z, u)$, y $y = g(z, u)$ son las funciones cuya existencia en una vecindad de $(0, 1, 0, 1)$, se probó en (a), demuestre que la función $F(z, u) = (h(z, u), g(z, u))$ tiene una función inversa diferenciable en una vecindad del punto $(0, 1)$.

9. Pruebe que la ecuación $2z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$, define implícitamente una función $z = f(x, y)$ de clase $C^\infty$ en una vecindad de $\left(-12.12\sqrt{3}, 24\sqrt{3}\right)$ y que la función $f$ posee un mínimo local en $\left(-12, 12\sqrt{3}\right)$.