VARIABLE COMPLEJA , EXAMEN GENERAL,2002

I-. Sea $T_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ dada por una matriz A con coeficientes reales. Que condiciones debe de satisfacer la matriz A para que T_A sea una función holomorfa del plano complejo en el plano complejo.

II-. Calcular las integrales y justificar la respuesta.

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos\ x}{(x^2+1)^2} dx$

ii) $\int_{\gamma} \frac{1+z}{1-cos z} dz$ donde γ es el círculo de radio 7 con centro en el origen.

III-. Demostrar que si $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función armónica y $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es analítica entonces $u \circ f$ es armónica. Explicar como se utiliza el resultado anterior en problemas de frontera (i.e. problemas de Dirichlet y Newton).

IV-. Probar el Teorema de Cauchy (utilizando el teorema de Green) y enunciar tres teoremas que son consecuencia del teorema de Cauchy.

V-. Describir como son todas las funciones holomorfas biyectivas del disco unitario en el disco unitario y en particular como son las que dejan fijo al cero.