

Examen General de Variable Compleja
(19 de enero de 2006. Tiempo 4hrs.)

1. Sea f una función analítica en A y sea $f'(z_0) \neq 0$. Prueba que si γ es un círculo centrado en z_0 de radio suficientemente pequeño, entonces

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

2. i) Encuentra la expansión en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ de $\sin(1/z)$.
¿Cuál es el residuo en $z = 0$?

ii) Evalúa

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^4} dx.$$

3. Supón que f es entera y que $|f| \geq 1$ para toda z . Prueba que f es constante.

4. Enuncia y demuestra el lema de Schwartz.

5. Prueba que la transformación fraccional lineal más general que envía el semiplano superior en el disco unitario es

$$T(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right)$$

con $\text{Im } \lambda > 0$