Examen General de Variable Compleja
Maestría en Matemáticas Básicas - CIMAT
Enero de 2006

Nota: Cada pregunta vale 10 puntos. La calificación aprobatoria es de 49 puntos

(1) (a) Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A y $z_0 \in A$. Demuestra que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0.

(b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal. ¿Qué condiciones debe satisfacer la representación matricial de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ para que T sea analítica?

(2) Sea log la rama principal del logaritmo $(-\pi < arg(z) < \pi)$ y sea $f(z) = \log(z^2 + 1)$. Describe el abierto más grande en el que f es analítica.

(3) Si $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en todo $\mathbb{C}$, tal que

$$|f(z)| < |z|^N,$$

para alguna $N \in \mathbb{N}$ y $|z|$ grande, demuestre que f es un polinomio de grado $\leq N$.

(4) Determina qué tipo de singularidades tienen las siguientes funciones en $z_0 = 0$:

$$(a) \quad \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}. \quad (b) \quad \frac{z^2 + e^z}{z(z-3)}.$$

(5) Demuestra que para $a > 0, b > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3}(1 + ab)e^{-ab}.$$

(6) Sea f una función analítica en todo $\mathbb{C}$, tal que f tiene una singularidad no-esencial en ∞. Demuestra que f es un polinomio.

(7) Determina una fórmula explícita general de las transformaciones analíticas biyectivas $T\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ del semiplano superior $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ en el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$.