Exámen General de Variable Compleja
julio-2001

Resolver **7** preguntas. Cada pregunta vale $\frac{10}{7}$ puntos.

1. Calcule
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^2}{(z-b)(z-a)^2}dz, \quad 0<|a|<r<|b|.$$
2. Si $f\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, tal que
$$|f(z)|<|z|^N,$$
para alguna $N\in\mathbb{N}$ y $|z|$ grande, demuestre que f es un polinomio de grado $\leq N$.
3. Demuestre que
$$|e^z-1|\leq e^{|z|}-1\leq |z|e^{|z|}.$$
Sugerencia: la serie que define a e^z es absolutamente convergente.
4. Sea $U\subset\mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f,g\colon U\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones holomorfas tales que $f(z)g(z)\neq 0$, para toda $z\in U$. Suponga además que existe una sucesión $\{a_n\}$, con $a_n\in U$ para toda $n\in\mathbb{N}$, tal que
   a. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\in U$,
   b. $a_n\neq a$, para toda $n\in\mathbb{N}$, y
   c. $\dfrac{f'(a_n)}{f(a_n)}=\dfrac{g'(a_n)}{g(a_n)}$, para toda $n\in\mathbb{N}$.

   Demuestre que existe una constante $c\in\mathbb{C}$ tal que $f(z)=cg(z)$.
5. Calcule por residuos: $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}e^{e^{i\theta}}d\theta.$
6. Calcule por residuos: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx.$
7. Demuestre que si $P(z)\in\mathbb{C}[z]$ es un polinomio no constante, entonces existe al menos una raíz compleja de $P(z)$.
8. Demuestre que toda aplicación conforme del disco unitario en sí mismo es de la forma
$$T(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad |a|<1.$$