

**Examen General de Variable Compleja**  
**Julio de 2006**

- (1) Describe un dominio de analiticidad para la función

$$f(z) = \sin(\log(z^2))$$

y calcula su derivada. ¿En qué puntos es que esta función **f no** es conforme?

- (2) ¿Para cuáles curvas simples y cerradas  $\gamma$  la ecuación

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0$$

es válida?

- (3) Calcula

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{8z}}{z^6} dz.$$

- (4) Sea  $f$  una función entera y supongamos que existen  $M > 0$ ,  $R > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$  tales que

$$|f(z)| \leq M|z|^n$$

para toda  $|z| > R$ . Probar que  $f$  es un polinomio de grado  $\leq n$ .

- (5) Encuentra el máximo de  $|e^{z^2}|$  en el disco unitario  $\{z : |z| \leq 1\}$ .

- (6) Sea

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}.$$

Encuentra sus polos y calcula la expansión de  $f$  en Serie de Laurent alrededor de ellos. Calcula los residuos de  $f$  en los polos. Calcula

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \quad \text{donde } R \neq |\text{polos}|.$$

- (7) Utiliza el Teorema del residuo (justificando su uso) para calcular la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)}.$$