Examen general de Análisis Funcional, CIMAT

Julio de 2015

Nota: El examen se evaluará sobre un total de 80 puntos, considerándose aprobado a partir de los 56. Dado que el total de puntos es 90, es necesario que dejes sin resolver un apartado -o ejercicio- con valor de 10 puntos, o bien dos apartados de 5 puntos. Escribe tu elección de manera explícita.

1. (10 puntos) En el espacio de funciones continuas $\mathcal{C}([0,1])$ se considera el subconjunto
$$M = \{f \in \mathcal{C}([0,1]),\ \ f(0) = f(1) = 1\}.$$
Determina si M es cerrado y si es acotado.

2. (10 puntos) Prueba que la sucesión $\{n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente pero no converge en el espacio $L_p(0,1)$.

3. (10 puntos) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y denotemos por $R[a,b]$ el espacio formado por las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que son Riemann-integrables. Determina si $R[a,b]$, con la norma del supremo, es completo. (Justifica tu respuesta)

4. (10 puntos) Sea $\{x_n\} \subset c_0$ y expresemos $x_n := \{x_{n,k} : k \in \mathbb{N}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si se cumple $0 \leq x_{n+1,k} \leq x_{n,k}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{n,k} \to 0$, cuando $n \to \infty$, prueba que $x_n \to 0$ en c_0.

5. (10 puntos) Determina si la norma en $L^1(0,1)$ proviene de un producto escalar.

6. (10 puntos) Sean X y Y espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si X es completo y T es 1-1, prueba que $R(T)$ es completo si y sólo si T^{-1} es continuo.

7. Consideremos $a < b$ y sea V el espacio formado por los polinomios reales de grado a lo más 2 definidos en $[a,b]$, y equipado con la norma $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$.
   i) (10 puntos) Determina el valor de $\inf\{\|f\| : f \in V, f$ es un polinomio mónico de grado 2 $\}$.
   ii) (5 puntos) Encuentra todos los polinomios en V donde este ínfimo se alcanza.

8. Sean $b > 0$, $\Omega := (0,b)$ y $1 \leq p \leq \infty$. Dada una función $u : \Omega \to \mathbb{K}$ definamos Mu por $Mu(t) := tu(t)$, $\forall \in \Omega$.
   i) (5 puntos) Verifica que M es lineal y que $Mu \in L^p(\Omega)$ cuando $u \in L^p(\Omega)$.
   ii (5 puntos) Prueba que el operador $M : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ es continuo.
   iii) (5 puntos) Encuentra la norma de $M : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$.