EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA LINEAL
PROGRAMA DE POSGRADO EN MATEMATICAS, CIMAT
2 de Julio de 2013

1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Transforma a A en su forma de Gauss Jordan, explicitando las matrices L ... por las que vas trasformando y las expresiones $LA = U, A = L'DU$, etc. que vas obteniendo.
b) Cual es el rango de A? Explicita una base para la imagen I y el kernel (o núcleo) K de A.
c) Resuelve $Ax = b$.
d) Para que valores b es que $Ax = b$ tiene solución y cuántas son (que estructura tienen)?
e) Da la matriz de proyección a los espacio I y K (son matrices de 3×3).
f) Explicita la solución por mínimos cuadrados de la ecuación

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

2. Considera el plano (afin) P_1 en $\mathbb{R}^3$ definido por $u + 2v - w = 6$,
a) Construye otro plano afin P_2 (i.e. describiendolo por su ecuación, como en P_1) que sea paralelo a P_1 y que pase por $(1, 1, 1)$.
b) Cuál es el punto en P_1 mas cercano a $(1, 1, 1)$?

3. Encuentra una base ortonormal del plano en $\mathbb{R}^4$ formado por vectores ortogonales a los vectores

$$(1, 4, 4, 1) \qquad (2, 9, 8, 2).$$

4. a) Pruebe que dos matrices simétricas son equivalentes (como transformaciones lineales) si, y solo si, tienen los mismos valores propios.
b) Muestre que si A y B son matrices equivalentes, entonces $\det A = \det B$.
c) Es cierta la implicación opuesta en el problema anterior? Por qué?

5. Haz el cambio de variable para desacoplar la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 3y, \end{aligned}$$

y escribe la solución general de la ecuación. Resuelve con la condición inicial $x(0) = 8, y(0) = 5$

6. Sea A una matriz $n \times n$ unipotente (todos sus valores propios son 1) en forma canónica de Jordan.
a) Demuestra que $dim\ Ker(I - A)$ es igual al número de bloques de Jordan de A.
b) $dim\ Ker(I - A)^2$ es igual a ....? (consider el número de bloques de Jordan de A de tamaño al menos 2.)
c) ¿Podrías generalizar estos resultados? ¿Cómo?