Examen General de Algebra

Maestria en Matemáticas, CIMAT

July 3, 2014

1. Sean a y n enteros, y considera el anillo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a) Prueba que $[a] \in \mathbb{Z}_n$ es unidad multiplicativa si y solo si a y n son primos entre si.

b) Si n es potencia de un número primo , $n = p^m$, prueba que el número de unidades es $\mathbb{Z}_{p^m}$ es $p^{m-1}(p-1)$.

c) Si $n = pq$ el producto de 2 primos distintos, cuántas y cuáles son las unidades multiplicativas de $\mathbb{Z}_{pq}$?

2. Sea K un campo y $p(T)$ un polinomio en $K[T]$. Construye un campo L mas grande que el campo K, pero lo mas pequeõ posible, donde ahora $p(T) \in L[T]$ sea completamente factorizable

$$p(T) = a(T - a_1) \cdots (T - a_n) \qquad , \qquad a, a_1, \ldots, a_n \in L.$$

3. Sea D un dominio entero que contiene un campo K, tal que D es un espacio vectorial de dimension finita sobre K. Demuestra que D es un campo.

4. a) Enuncia el Teorema Fundamental de Grupos Abelianos Finitamente generados.

b) Aplicala al grupo $\mathbb{Z}^2/\Lambda$, donde $\Lambda :=< \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} >$ (Utilizando el algoritmo de la división y multiplicación de matrices).

c) Enuncia el Teorema Fundamental para módulos finitiamente generados sobre un dominio euclidiano, y da en grandes razgos la idea de como procederias a hacer la demostración.