EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA LINEAL

MAESTRIAS EN MATEMATICAS, CIMAT

7 de Enero de 2014

1. Sea $V \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial del espacio Euclideano $(\mathbb{R}^4, < \ , \ >)$ definido por las ecuaciones:

$$x + 2y + 3z + 4w = 0 \qquad , \qquad x + 3z = 0 \qquad , \qquad \frac{1}{2}y + w = 0$$

a) Encuentra una base ortonormal para V y para $V^\perp$.

b) Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ el subconjunto del espacio Euclideano $(\mathbb{R}^3, < \ , \ >)$ formado por (a, b, c) tales que hay solución a las ecuaciones

$$x + 2y + 3z + 4w = a \qquad , \qquad x + 3z = b \qquad , \qquad \frac{1}{2}y + w = c$$

Calcula una base ortonormal para W y $W^\perp$.

c) Da las fórmulas de proyección (como matrices cuadradas) sobre $V, V^\perp, W, W^\perp$.

d) Da la expresión en términos de una matriz de 3×4 que de la solución por mínimos cuadrados del problema

$$x + 2y + 3z + 4w = a \qquad , \qquad x + 3z = b \qquad , \qquad \frac{1}{2}y + w = c$$

y especifica cuándo tiene solución exacta y cuándo solo aproximada.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad , \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el polinomio característico de A y los valores propios de A.

b) Calcula una base para $Ker(A - \lambda_j)$, con λ_j un valor propio de A.

c) Alcanza para una base de $\mathbb{R}^3$? Si no, completala con vectores propios generalizados.

d) Pon A en forma canónica de Jordán.

e) Cuál es el polinomio mínimo de A?

3. Cuántas y cuáles son las "formas normales" de matrices de 4×4 con polinomio característico t^4, donde la equivalencia de matrices es por conjugación $(A \to B.A.B^{-1})$?

4. a) Dá la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

b) Da una expresión de la función

$$e^{A}t \qquad , \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Especifica el comportamiento de las soluciones cuando $t \to \infty$, y como este comportamiento depende de la condición inicial.

5. Considera la siguiente forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$:

$$x^2 - xy - yz + z^2$$

Encuentra la matriz simétrica que representa la forma bilineal simétrica asociada, así como el rango y la signatura de la forma bilineal.