EXAMEN GENERAL DE ALGEBRA
MAESTRIA, CIMAT
11 de Enero de 2016

Responde las siguientes pregunta. Tienes 4 horas para responder.

1. En el grupo de permutaciones Per_4 de 4 letras, encuentra un subgrupo que no sea normal y determina todos los subgrupos conjugados a él.

2. a) Enuncia el Teorema de Clasificación de grupos abelianos finitamente generados.

b) Considera el $\mathbb{Z}$-módulo Γ generado en $\mathbb{Z}^3$ por los vectores

$$(2,3,4)\ ,\ (1,3,4).$$

Determina el tipo (de acuerdo al teorema anterior) de Γ_1 y de $\mathbb{Z}^3/\Gamma$.

c) Considera el $\mathbb{Z}$-módulo Γ_2 generado en $\mathbb{Z}^3$ por los vectores

$$(2,3,4)\ ,\ (1,3,4)\ ,\ (1,3,5).$$

Determina el tipo (de acuerdo al teorema anterior) de Γ y de $\mathbb{Z}^3/\Gamma$.

d) Determina el tipo del grupo Γ_2/Γ_1.

e)Determina el kernel de $\mathbb{Z}^3/\Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{Z}^3/\Gamma_2$.

e) Construye el diagrama conmutativo que ilustra esta situación, especificando donde es exacto.

f) Esboza una demostración del Teorema de Clasificación de grupos abelianos finitamente generados.

3. Enuncia y esboza una demostración del teorema de factorización única en el anillo de polinomios en n-variables sobre un campo $K[X_1,\ldots,X_n]$.

4. Sea A un anillo conmutativo Noetheriano y α un ideal primo en A. Demuestra que el anillo cociente A/α y el anillo localizado A_α son Noetherianos.

5. Sea $\alpha = (x,y)$ el ideal generado por $x,y \in \mathbb{Q}[x,y]$. Especifica quién es el localizado $\mathbb{Q}[x,y]_\alpha$. Es él finitamente generado como anillo? Es él un anillo de ideales principales? Es él un dominio Euclidiano? Es él un dominio de factorización única?