Examen General de Análisis, Enero 2013

Cada ejercicio cuenta 10 puntos. Necesitas 42 puntos para aprobar el examen.

1) Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbf{R}^3$ que sea conexo y tenga exactamente 3 componentes arco-conexas.

2) Sean $A, B \subset \mathbf{R}^n$ conjuntos disjuntos acotados. $f : A \cup B \to \mathbf{R}$ una función acotada tal que $f_{|A}$ y $f_{|B}$ son integrables. Es f integrable? Probarlo o dar un contraejemplo.

3) Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un abierto, $f : A \to \mathbf{R}$ una función de clase C^2 y $x_0 \in A$ un punto crítico de f. Demostrar que si el Hessiano de f en x_0, $H(f)(x_0) = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)_{ij}$, es definido positivo entonces x_0 es un mínimo local de f.

4) (a) Encontrar el máximo y el mínimo de $f(x,y,z) = \ln(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 1)$ en $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. **(5 puntos)**
(b) Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 \leq 4,\ y^2 + z^2 \leq 1\}$, $f(x,y,z) = \cos(x + y^2 + z^2)$. Calcular $\int_A f$. **(5 puntos)**

5) Decidir si las siguientes series son convergentes:
(a) $\Sigma_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$ **(3 puntos)** (b) $\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin(1/k)$ **(3 puntos)**
(c) $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1) - \log(k)}{\sqrt{k}}$(**4puntos**)

6) Sean $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $i = 1,..,k$ $(k < n)$ funciones de clase C^2, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tales que $\{\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0), ..., \nabla f_k(x_0)\}$ es linealmente independiente. Sea $S = \{x \in \mathbf{R}^n : f_i(x) = f_i(x_0), i = 1, ...k\}$ y sea $v \in <\nabla f_1(x_0), \nabla f_2(x_0), ..., \nabla f_k(x_0)>^{\perp}$. Probar que existe una curva $\alpha : (-1,1) \to S$ de clase C^2 tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha'(0) = v$.