# Examen General de Análisis Julio 2013

**El examen dura 4 horas. Se necesitan 42 puntos para aprobar el examen.**

1) Sean $A, B \subset \mathbf{R}^n$ conjuntos disjuntos. Suponer que $A$ es cerrado y $B$ es compacto. Probar que existe $r > 0$ tal que para todo $(x, y) \in A \times B$, $d(x, y) > r$. (**10 puntos**)

2) Sean $A \subset \mathbf{R}^n$ acotado y $f, g : A \to \mathbf{R}$ funciones integrables tales que existe un conjunto denso $S \subset A$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$. Probar que $\int_A f = \int_A g$. (**10 puntos**)

3) Enunciar y demostrar el Teorema de Fubini. (**10 puntos**)

4) Sea $A \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbf{R}$ de clase $C^2$ y $x_0 \in A$ un máximo local de $f$. Probar que la matriz Hessiana de $f$, $H_{x_0}(f)_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j(x_0)$, es semidefinida negativa. (**10 puntos**)

5) Encontrar el máximo y el mínimo de $f(x, y, z) = y + z$ en el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 \leq 1, x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$. (**6 puntos**)

6) Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 \leq 1, (x - z)^2 + (y - z)^2 \leq 1\}$. Calcular el volumen de $A$. (**6 puntos**)

7) Decidir si la serie $\Sigma_{k=1}^{\infty} \sin(1/k) - \sin(1/(k+1))$ es convergente o no lo es (**8 puntos**).