

Julio de 2014

Instrucción: Cada pregunta vale 2 puntos y se necesita una calificación mínima de 7.5 para aprobar.

1. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y considera la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x.$$

Demuestra lo siguiente:

- (a) Dada la condición inicial  $x(0) = x_0$ , existe una única función  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y diferenciable que es solución del problema de valor inicial.
- (b) El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial de dimensión 1.
2. Muestra que la solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2xy^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

existe solamente en el intervalo  $|x| < 1$ .

3. Muestra que todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dy^2} + a^2y + by^3 = 0,$$

son periódicas si  $b > 0$ .

4. Encuentra la solución general a

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y bosqueja el retrato fase.

5. Utiliza una función de Liapunov adecuada para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3. \end{aligned}$$