INSTRUCCIONES: Justifica apropiadamente cada una de tus respuestas para obtener crédito. Empieza cada ejercicio en una hoja nueva y engrapa tus respuestas en la esquina superior izquierda. Escribe tu nombre en cada una de tus hojas de respuestas. **Responde 5 problemas**. Todos los problemas valen lo mismo. La calificacion mínima para aprobar es 8.

1. Encuentra la solución general a

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

y bosqueja el retrato fase.

2. Sea A un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio no vacío. Si A deja invariante a S, demuestra que el flujo del sistema $\bar{x}' = A\bar{x}$ deja también invariante a S.

3. Sea $A : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una función continua.

   (a) Muestra que cualquier solución del sistema $\dot{x} = A(t)x$ satisface la relación
   $$||x(t)|| \leq ||x(0)|| \exp\left(\int_0^\infty ||A(s)|| ds\right)$$

   (b) Muestra que si $\int_0^\infty ||A(s)|| ds < \infty$, entonces cualquier solución $x(t)$ del sistema tiene un límite finito conforme $t \to \infty$

4. Muestra que la solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2xy^2 \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

existe solamente en el intervalo $|x| < 1$.

5. Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2 + x_1 x_2, \end{aligned}$$

y determina las variedades locales estable e inestable respectivamente.

6. Usa una función de Lyapunov para estudiar la estabilidad de la solución estacionaria $(0, 0)$ del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} &= x - y^3 - x^2 y. \end{aligned}$$