EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA
3 DE JULIO DE 2014
10AM-2PM

CIMAT

Este examen tiene dos páginas y contiene seis ejercicios. Para aprobar es necesario resolver **bien** al menos 5 ejercicios **completos**.

(1) Sea X un espacio topológico. Un punto $a \in X$ se llama aislado si $a \in X - X'$. Un subconjunto se llama perfecto si es cerrado y no tiene puntos aislados. Demuestra que si $A \subseteq X$ no tiene puntos aislados, entonces $\overline{A}$ es perfecto.

(2) Recordemos que si Y es un espacio topológico, se define el cono sobre Y como

$$CY = Y \times [0,1]/Y \times \{0\}$$

con la topología cociente. Demuestra que si A es un subespacio cerrado de X, entonces CA es homeomorfo a un subespacio cerrado de CX.

(3) Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X y sea $X/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia con la topología cociente.

(a) Demuestra que $X/\sim$ es $T1$ si y sólo si cada clase de equivalencia es cerrada en X.

(b) Sea $R = \{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\} \subseteq X \times X$. Demuestra que si R es cerrado en $X \times X$ y el cociente $q : X \to X/\sim$ es una función abierta, entonces $X/\sim$ es Hausdorff.

(4) Sea $X = S^1 \times I/\sim$ donde $(x,0) \sim (-x,0)$ y $(z,1) \sim (-z,1)$. Da una presentación del grupo fundamental de X.

(5) Demuestra que un espacio contráctil debe ser simplemente conexo.

(6) Describe el espacio recubridor de $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ correspondiente al subgrupo $\langle a^2, ab, ba^{-1}, ac, ca^{-1} \rangle$ de $\langle a, b, c \rangle \cong \pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$ y demuestra que es el correcto. (Pista: Es un subgrupo de índice dos).